**G. D'Agostini**

# Promemoria delle lezioni di Fisica 1

(Informatica e Tecniche informatiche, Canale P-Z, A.A. 06/07)

## 1 Lunedi 26/2, 16:00–18:00

### 1.1

Introduzione corso e informazioni varie. In particolare, si ricordano gli obiettivi del corso:

> *Vengono presentati alcuni concetti di base della fisica riguardanti la meccanica del punto, la termodinamica e i fenomeni elettrici: velocità, accelerazione, forze e campi di forze, massa, cariche, energia, temperatura, corrente elettrica, etc. Il corso ha sia una finalità; propedeutica ai successivi corsi di Fisica 2 e Fisica 3 che formativa in senso generale. Infatti per gran parte degli studenti questa è la prima occasione in cui si fa uso di modelli matematici per descrivere problemi della realtà nelle cui soluzioni si usano un certo numero di strumenti matematici appresi nella scuola media superiore e nel primo anno del corso di laurea.*

### 1.2

Introduzione al corso.

### 1.3

Introduzione alla cinematica. Cinematica unidimensionale (anche moto curvilineo). Lettura grafici. Velocità e velocità angolare.

### 1.4

Consegna test di autovalutazione (correzione → **tutoraggio** venerdi).

## 1.5 Problemini proposti

:

1. All'istante $t_1 = 10\,s$ un corpo si trova nel punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$. Sapendo che il corpo viaggia con velocità costante $v = -2\,\mathrm{m/s}$, calcolare la posizione all'istante $t_2 = 15\,s$.

2. Maratoneta percorre 42 km e 195 m in 2 ore e 8 min (Roma 13/3/05): calcolare velocità media in km/h e in m/s (non usare 'fattori di conversione', ma usare semplicemente $v = \Delta s/\Delta t$, con $\Delta s$ e $\Delta t$ nelle varie unità).

3. Nuotatore fa 8 vasche da 50 metri in 5 minuti e 40 secondi: calcolare velocità media. attentamente alla consistenza di formule e risultati ottenuti.]

4. Auto viaggia la prima metà del tempo totale di percorrenza a velocità $v_1$ e la seconda metà a $v_2$. Calcolare velocità media. (Es. $v_1 = 100\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 50$).
   In cosa differeisce questo problema dal problema precedente?

5. Velocità della Terra intorno al Sole, assumendo orbita circolare: *cercarsi* i dati che servono: distanza Terra-Sole e periodo di rivoluzione.

6. Velocità intono all'asse di rotazione terrestre di I) persona all'equatore; II) persona a Roma ($42^o$ latitudine).

7. Oggetto, inizialmente fermo, cade da una torre. Posizione in funzione del tempo (sistema di riferimento diretto verso il basso): $s(t = 0\,\mathrm{s}) = 0$; $s(t = 0.5\,\mathrm{s}) = 1.225\,\mathrm{m}$; $s(t = 1\,\mathrm{s}) = 4.9\,\mathrm{m}$; $s(t = 2\,\mathrm{s}) = 19.6\,\mathrm{m}$.

   I) Calcolare la velocità media nei tre tratti (da 0 a 0.5 s, etc.).

   II) Assumendo che la velocità vari *linearmente* con il tempo, calcolare la velocità per $t = 0.5\,\mathrm{s}$, $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$.

8. Due treni partono alla stessa ora in 'direzioni opposte' da due località agli estremi di una linea ferroviaria (ad es. Roma-Milano) di lunghezza $d$. Sapendo che le velocità valgono in modulo $v1$ e $v_2$, trovare l'espressione di tempo e posizione di incontro. Aiutarsi con un grafico orario del problema. [Fare esempio numerico con $d = 600\,\mathrm{km}$, $v_1 = 120\,\mathrm{km/h}$ e $v_1 = 80\,\mathrm{km/h}$.]

9. Un camion imbocca l'autostrada per raggiunngere una località distante 200 km e viaggia regolarmente a 70 km/h. Dopo 20 minuti una macchina imbocca lo stesso tratto di autostrada per raggiungere la stessa destinazione, viaggiando però a 130 km/h. Quale autoveicolo arriverà prima? A quale velocità dovrebbe viaggiare la macchina in modo tale che arrivino allo stesso tempo? [Si raccomanda di visualizzare graficamente il problema.]

10. Un hard disk da 2.5″ ruota alla velocità di 7200 rpm. calcolare la velocità angolare di rotazione e la velocità di rotazione di un punto situato sulla circonferenza del disco.

11. Un punto materiale si muove lungo l'asse $x$ con la seconda legge oraria:

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v_0\, t + x_0$$

con $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v_0 = -1\,\mathrm{m/s}$ e $x_0 = 5\,m$. Calcolare la velocità media fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.5\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.1\,\mathrm{s}$, fra $t = 1\,\mathrm{s}$ e $t = 1.001\,\mathrm{s}$. Preferibilmente scrivere l'equazione oraria coma una *function* in qualche linguaggio di programmazione, graficare la legge oraria e ripetere l'esercizio calcolando la velocità media in altri intervalli usando lo stesso criterio (ad es. fra 5 e 6 secondi, fra 5 e 5.5 secondi, etc).

12. Un disco ruota alla velocità di 45 giri al minuto. Calcolare quanti radianti e quanti gradi percorre in 0.1 secondi.

13. Un oggetto si muove su una circonferenza di 20 cm a 10 cm/s. Calcolare periodo di rotazione, frequenza e velocità angolare.

# 2 Venerdi 2/3, 16:00–18:00

## 2.1

Velocità costanti a tratti (di tempo o di spazio): → velocità media.

## 2.2

Moti con velocità variabile: velocità come pendenza; velocità istantanea → derivata. Cenno ai metodi numerici. Esempio guida (fig. 1)

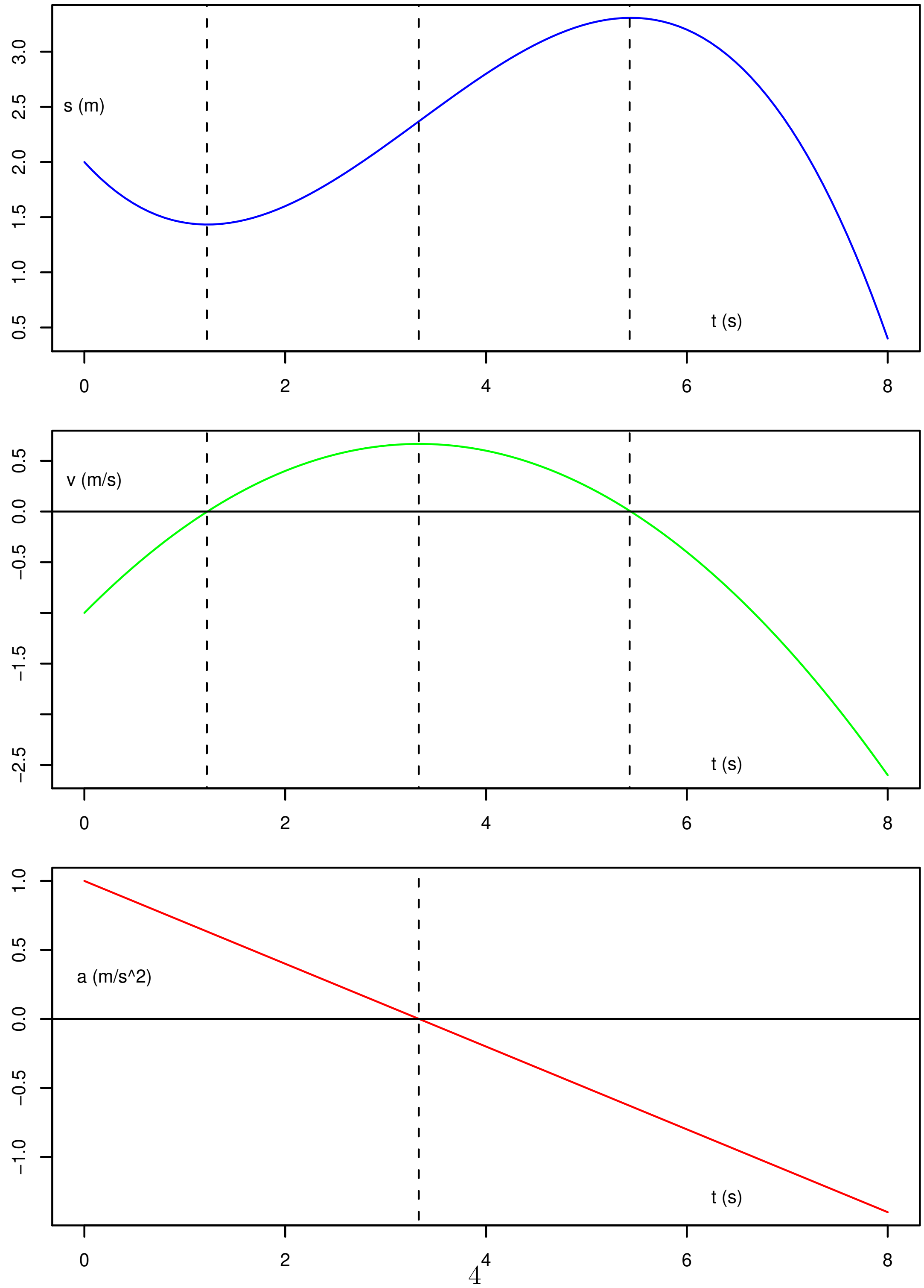




Figura 1: *Posizione, velocità e accelerazione*

$$s(t) = \alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2 + \delta\, t^3 \qquad (1)$$

con $\alpha = 2\,\mathrm{m}$, $\beta = -1\,\mathrm{m/s}$, $\gamma = 0.5\,\mathrm{m/s^2}$ e $\delta = -0.05\,\mathrm{m\ /s^3}$.

### 2.3

Accelerazione media ed istantanea; accelerazione come derivata.

### 2.4

$a(t) \rightarrow v(t) \rightarrow s(t)$:

$$\Delta v = \lim_{\delta t_i \to 0} \sum_i a_i\, \delta t_i \rightarrow A[a(t)]|_{t_1}^{t_2} \qquad (2)$$

$$\Delta s = \lim_{\delta t_i \to 0} \sum_i v_i\, \delta t_i \rightarrow A[v(t)]|_{t_1}^{t_2}\ . \qquad (3)$$

Moto uniformemente accelerato ricavato con il metodo delle aree.

## 2.5 Problemini proposti

:

1. Auto accelera da 0 a 100 km/h in 7 secondi: calcolare accelerazione media in $\mathrm{m/s^2}$.

2. Un punto materiale si muove seguendo la seguente equazione oraria $x(t) = x_0\, cos(\omega\, t)$, con $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$ $\omega = 10\,\mathrm{s^{-1}}$. Trovare $v(t)$, $a(t)$ e il rapporto $a(t)/v(t)$. In particolare, determinare i valori massimi e minimi di velocità e accelerazione.

3. Un corpo ha inizialmente una velocità di $-5\,m/s$. Ad un certo istante ($t = 0$) subisce un'accelerazione la quale cresce linermente con il tempo, raggiunge il valore di $5\,\mathrm{m/s}$ dopo 2 secondi e quindi si mantiene costante. Determinare la velocità all'istante $t = 3\,\mathrm{s}$.

4. Un oggetto possiede una velocità che varia con il tempo nel seguente modo $v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}$, con $\tau = 10\,\mathrm{s}$. Calcolare il tempo necessario affinché la velocità del corpo si dimezzi. Sapendo inoltre che $v_0$ vale $10\,\mathrm{m/s}$, calcolare l'accelerazione in quell'istante.

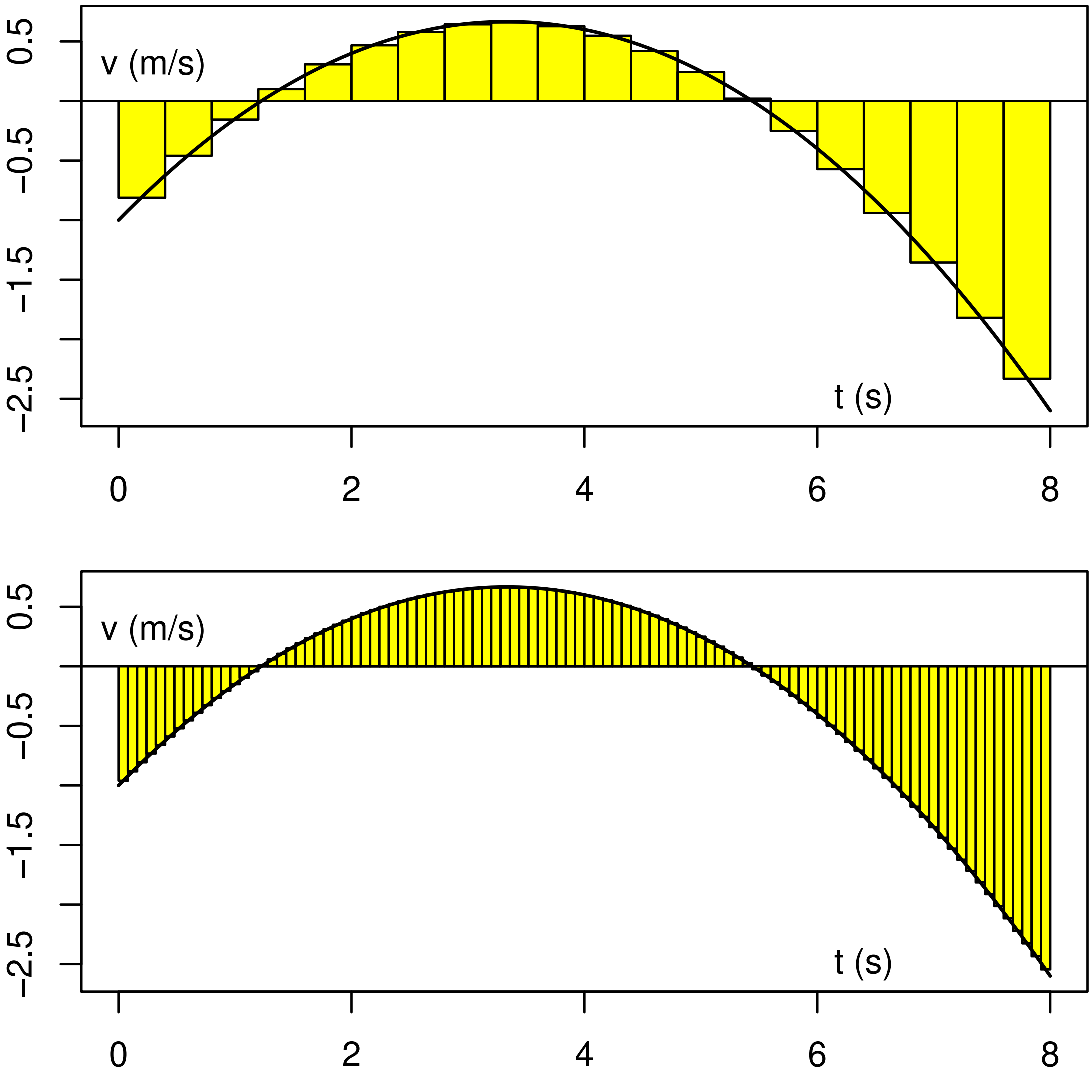


Figura 2: *Interpretazione dell'area 'sotto' la curva v(t).*

5. Corpo cade da una torre di altezza $h = 20\,m$ (trascurando resistenza dell'aria)
   - A che velocità arriva al suolo?
   - Quanto tempo ci mette?

(Si ricorda che l'accelerazione di gravità vale $9.8\,\mathrm{m/s^2}$.)

6. Problema del sasso nel pozzo. Tempo intercorso fra quando si lascia cadere il sasso a quando si *vede* lo 'splash': quanto è profondo il pozzo? E se invece di vedere lo 'splash', si ode il tonfo? (Ovvero quanto varia la valutazione di profondità se si tiene conto della velocità finita del suono). Fare esempio numerico con $t = 3\,s$ e $v_s = 300\,\mathrm{m/s}$.

7. Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0$:

   - A che altezza arriva?
   - Quanto tempo ci mette?
   - Con quale velocità ritorna alla posizione di partenza?
   - Quanto ci mette a a tornare?
   - Grafico $z(t)$.
   - Come varia la velocità (con segno) da quando l'oggetto parte verso l'alto a quando torna nella posizione iniziale? ($\rightarrow$ grafico.)
   - Grafico di $a(t)$.

   (Come esempio numerico si prenda $v_0 = 10\,m/s$)

8. I problemi di accelerazione e frenata di veicoli sono assolutamente analoghi:

   - Quanto tempo impiega per arrestarsi una macchina che è frenata con accelerazione $a$ (per es $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$) se all'inizio della frenata viaggiava a $v_0$ (per es. $100\,\mathrm{k/h}$)?
   - Quanto vale lo spazio di arresto? [$\rightarrow d = d(v_0, a)$].

# 3 Lunedi 5/3, 16:00–18:00

Esercitazioni: moti curvililei uniformi (incluso moto circolare uniforme); moti uniformemente accelerati. Esercizi per casa.

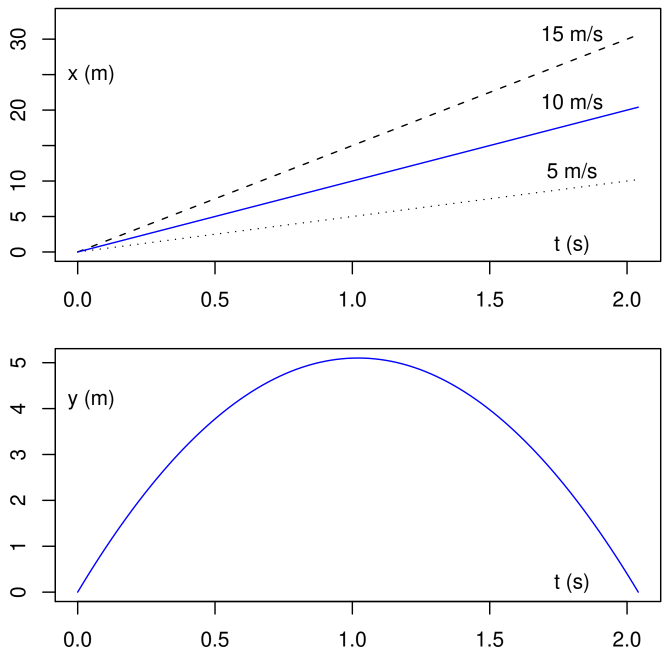


Figura 3: *Diagrammi orari delle coordinate cartesiane del problema del lancio di oggetto ad accelerazione di gravità $a_y = -g$ per un certo valore di $v_{y_0}$ (10 m/s) e tre diversi valori di $v_{x_0}$ (5, 10 e 15 m/s).*

# 4 Venerdi 9/3, 16:00–18:00

Correzione esercizi.
Cinematica in 2D: riferimento cartesiano e polare e trasformazioni da un riferimento all'altro. Ripasso su nozioni fondamentali di trigonometria. Vettori: definizione, proprietà e operazioni su/fra di essi, con esclusione del prodotto vettoriale.
Descrizione parametrica cartesiana dei moti in 2D, in particolare moto parabolico (vedi Figg. 3 e 4) e circolare uniforme.

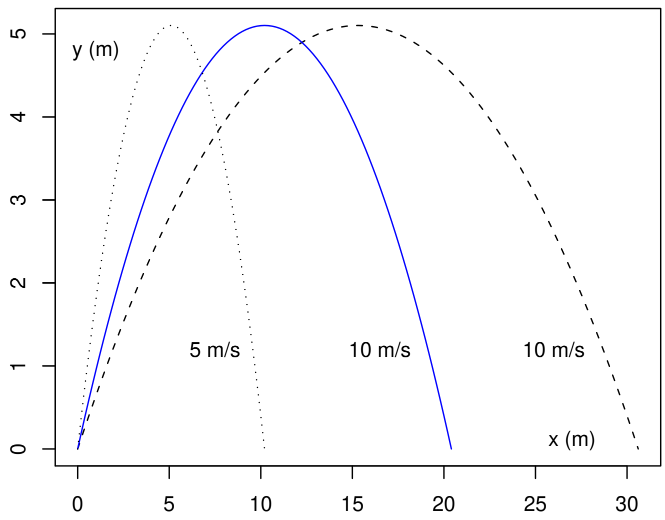


Figura 4: *Traiettoria seguita dall'oggetto del quale abbiamo mostrato in Fig. 3 i diagrammi orari delle coordinate cartesiane.*

# 5 Lunedi 12/3, 16:00–18:00

## 5.1

Problemi proposti per casa:

1. Mentre un signore sta rientrando a casa, percorrendo una strada dritta, viene visto dal suo cagnolino, il quale gli va incontro. Quando il cagnolino incontra il padrone, ritorna a casa, arriva all'uscio di casa, abbaia alla padrona per annunciare che il marito è di ritorno, e poi ritorna incontro al padrone. La storia va avanti "all'infinito" (*Zeno docet*). Sapendo che quando il cane comincia a correre per la prima volta il padrone stava a 100 m, che il padrone cammina a 4 km/h e che il cane corre a 20 km/h, trovare quanta strada ha percorso il cane quando il padrone varca l'uscio di casa.

2. Un punto materiale è soggetto ad una accelerazione variabile nel tempo. Essa era nulla per $t < 0$, poi, da $t = 0$, cresce linearmente fino a raggiungere 10 m/s$^2$ a $t = 1\,$s e successivamente decresce, sempre linearmente, fino ad annullarsi a $t = 5\,$s. Sapendo che la velocità del punto materiale a $t = 0$ era pari a 10 m/s, calcolare la velocità al tempo $t = 5\,$s.

3. Si vuole misurare la profondità di un pozzo dal ritardo temporale fra quando si lascia cadere un sasso dal bordo superiore a quando si ode il tonfo del sasso nell'acqua. Assumendo che si misurino 3 secondi e che la velocità del suono valga 340 m/s, trovare la profondità del pozzo.

4. Si lancia un sasso verso l'alto e si osserva che esso arriva a 3 metri di altezza (rispetto alla quota alla quale si era staccato dalla mano che lo ha lanciato).
   (a) Si determini la velocità iniziale del sasso.
   (b) Si calcoli il tempo che esso ha impiegato a raggiungere tale altezza.
   (c) Sapendo che quando la mano ha appena lanciato il sasso verso l'alto si trovava a 160 cm dal suolo, si determini la velocità con la quale il sasso arriva al suolo.
   (d) Si determini anche il tempo impiegato per arrivare dal punto più alto al suolo.

5. Un'auto viaggia a 50 km/h impiega 25 metri per frenare. Assumendo che la frenata sia modellizzabile con un moto uniformemente accelerato (con accelerazione negativa) e che l'accerelazione non dipenda dalla velocità, si calcoli lo spazio di frenata nel caso la velocità iniziale sia di 100 km/h. (Suggerimento si cerchi di utilizzare le formule ricavate per risolvere il problema precedente.)

## 5.2

Ancora descrizione in coordinate cartesiane del moto circolare uniforme.

$$\begin{cases} x(t) = R\,\cos\omega t \\ y(t) = R\,\sin\omega t\,, \end{cases} \tag{4}$$

dalle quali otteniamo le seguenti velocità:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega\,R\,\sin\omega t \\ \\ v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega\,R\,\cos\omega t\,. \end{cases} \tag{5}$$

Derivando ancora una volta otteniamo le seguenti accelerazioni:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\,R\,\cos\omega t \\ \\ a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2\,R\,\sin\omega t\,. \end{cases} \tag{6}$$

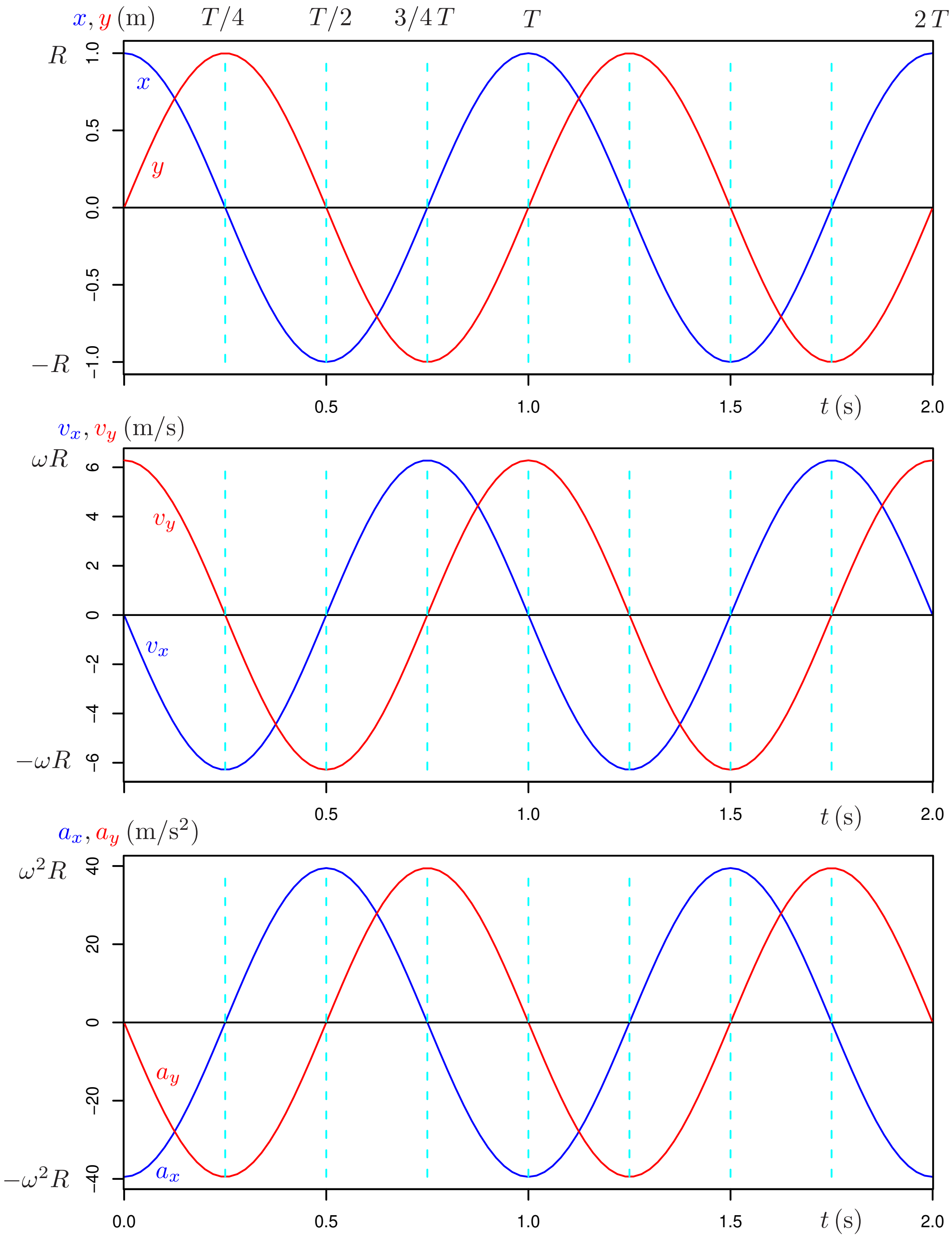


Figura 5: *Posizione, velocità e accelerazione di un moto circolare uniforme in coordinate cartesiane* ($R = 1\,m$ e $T = 1\,s$). Si notino gli sfasamenti fra le diverse funzioni sinusoidale: $x(t) \to y(t)$; $x(t) \to v_x(t) \to a_x(t)$; $y(t) \to v_y(t) \to a_y(t)$.

Descrizione vettoriale ($\vec{r}(t) \rightarrow \vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}(t)$).
Oscillazioni armoniche delle componenti di $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= R\cos\omega\, t &&= s_M\,\cos\omega\, t &(7)\\
v_x(t) &= \omega\, R\,\cos\left(\omega\, t+\pi/2\right) &&= v_M\,\cos\left(\omega\, t+\pi/2\right) &(8)\\
a_x(t) &= \omega^2\, R\,\cos\left(\omega\, t+\pi\right) &&= a_M\,\cos\left(\omega\, t+\pi\right) &(9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= R\sin\omega\, t &&= s_M\,\sin\omega\, t &(10)\\
v_y(t) &= \omega\, R\,\sin\left(\omega\, t+\pi/2\right) &&= v_M\,\sin\left(\omega\, t+\pi/2\right) &(11)\\
a_y(t) &= \omega^2\, R\,\sin\left(\omega\, t+\pi\right) &&= a_M\,\sin\left(\omega\, t+\pi\right), &(12)
\end{aligned}$$

nelle quali abbiamo indicato con $s_M$, $v_M$ ed $a_M$ le ampiezze di oscillazione nello spazio, nella velocità e nell'accelerazione (velocità ed accelerazione di ciascuna componente sono state riscritte con la stessa funzione sinusoidale delle coordinate, usando le ben note relazioni trigonometriche — vedi Fig. 5 per il significato degli sfasamenti (anticipi e ritardi).
Accelerazione centripeta.

## 5.3

$\Rightarrow$ $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$ e suo significato: oscillazioni armoniche. Tale relazione vale per entrambe le componenti ($a_x = -\omega^2 x$ e $a_y = -\omega^2 y$). Ogni qual volta una grandezza e la sua 'accelerazione' sono legate in questo modo, tale grandezza varia nel tempo in modo sinusoidale.
$\Rightarrow$ In generale, per la generica grandezza $z(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, z(t) = -\omega^2\, z(t) \quad\Longleftrightarrow\quad z(t) = A\,\cos(\omega t+\phi)\,, \tag{13}$$

ove l'ampiezza $A$ e la fase $\phi$ dipendono dalle condizioni iniziali del problema.

## 5.4

Moduli di $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$.

### 5.5

Primo e secondo principio della meccanica (principio di inerzia e '$F = m\,a$', con sua scrittura vettoriale e sue letture, in particolare $a = F/m$).

**Accelerazione e forze**: Le accelerazioni sono dovute a forze, secondo la famosa Seconda Legge di Newton, che in una sola dimensione è semplicemente

$$F = m\,a\,, \tag{14}$$

da imparare a leggere (e ad usare) come

$$a = \frac{F}{m}\,. \tag{15}$$

Il coefficiente di proporzionalità fra accelerazione e forza è $1/m$. Maggiore è la *massa*, maggiore è l'*inerzia del corpo*, ovvero la sua 'riluttanza' a cambiare velocità. Per questo motivo $m$ è anche chiamata *massa inerziale*. I problemi tipici che incontreremo sono quelli in cui si ha interesse a dedurre la cinematica dei corpi a partire dalle forze in gioco. $F$ sta per *forza totale* che agisce sul corpo ('punto materiale') di massa $m$, ovverossia la 'risultante delle forze'. Nel caso unidimensionale la forza totale è semplicemente la somma algebrica delle varie forze. Vedremo in seguito 1) come trovare la risultante delle forze quando queste agiscono su uno stesso punto ma non sono allineate; 2) cosa succede quando diverse forze agiscono sullo stesso stesso corpo esteso 'rigido' e non sono allineate.

Il caso di $F = 0$ dà $a = 0$, ovvero $v = \text{cost}$: velocità costante (zero è un caso particolare): $\Rightarrow$ 'prima legge di Newton', ovverossia 'principio di inerzia' (Galileo).

Alcune forze: $m\,g$, reazioni vincolari e forza elastica.
Interpretazione dell'accelerazione centripeta.

## 6 Venerdi 16/3, 16:00–18:00

### 6.1

Soluzione problemi.

| Grandezza | | Dimensione | | Unità di base SI | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nome | Simbolo | a) | b) | Nome | Simbolo |
| lunghezza | $l$ | dim $l$ | $\mathsf{L}$ | metro | m |
| massa | $m$ | dim $m$ | $\mathsf{M}$ | chilogrammo | kg |
| tempo | $t$ | dim $t$ | $\mathsf{T}$ | secondo | s |
| corrente elettrica | $I$ | dim $I$ | $\mathsf{I}$ | ampere | A |
| temp. termodinamica | $T$ | dim $T$ | $\Theta$ | kelvin | K |
| quantità di materia | $n$ | dim $n$ | $\mathsf{N}$ | mole | mol |
| intensità luminosa | $I_v$ | dim $I_v$ | $\mathsf{J}$ | candela | cd |

Tabella 1: Grandezze di base del Sistema Internazionale.

### 6.2

**Dimensioni e unità di misura della forze.** Dalla (14) si vede come una forza è dimensionalmente una massa per un'accelerazione, ovvero massa $\times$ lunghezza $\times$ spazio$^{-2}$:

$$\mathrm{dim}F \;=\; \mathsf{M\,L\,T}^2\,, \tag{16}$$

ovvero

$$\mathrm{dim}F \;=\; \mathrm{dim}(m\,l\,t^{-2})\,. \tag{17}$$

o anche

$$[\,F\,] \;=\; m\,l\,t^{-2}\,. \tag{18}$$

Se la massa è misurata in chilogrammi, la lunghezza in metri e il tempo in secondi (*unità di base* del SI, 'sistema internazionale', vedi tabella 1), la forza sarà data in $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$, ovvero in newton (N) (vedi tabella 2).

Nota: affinché le (14) e (15) non siano delle tautologia è necessario che almeno in principio ed in alcuni casi pratici la forza sia misurabile indipendentemente da massa e accelerazione mediante opportuni *dinamomentri.* Ovviamente questo non è sempre fattibile (si immagini la forza Terra-Sole). In questo caso la forza è ricavata da accelerazione e masse (come facciamo a conoscere le masse? Vediamo prima l'espressione della forza gravitazionale poi torniamo sul problema).

Le forze agenti sullo stesso punto materiale si sommano vettorialmente: $\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$.

| Grandezza | Dimensioni | Unità derivate SI | |
|---|---|---|---|
| | | Nome | Simbolo (Relazione) |
| angolo piano | — | radiante | rad ($1\,\mathrm{rad} = 1\,\mathrm{m/m}$) |
| angolo solido | — | steradiante | sr ($1\,\mathrm{sr} = 1\,\mathrm{m^2/m^2}$) |
| frequenza | $\mathsf{T}^{-1}$ | hertz | Hz ($1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$) |
| attività | $\mathsf{T}^{-1}$ | becquerel | Bq ($1\,\mathrm{Bq} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$) |
| forza | $\mathsf{M\,L\,T}^{-2}$ | newton | N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg \cdot m/s^2}$) |
| pressione | M Ł$^{-1}$T$^{-2}$ | pascal | Pa ($1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$) |
| energia | $\mathsf{M\,L^2\,T}^{-2}$ | joule | J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N \cdot m}$) $= 1\,\mathrm{W \cdot s}$ |
| potenza | $\mathsf{M\,L^2\,T}^{-3}$ | watt | W ($1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J/s}$) |
| dose equivalente | $\mathsf{L^2\,T}^{-2}$ | sievert | Sv ($1\,\mathrm{Sv} = 1\,\mathrm{J/kg}$) |
| dose in energia | $\mathsf{L^2\,T}^{-2}$ | gray | Gy ($1\,\mathrm{Gy} = 1\,\mathrm{J/kg}$) |
| carica elettrica | $\mathsf{T\,I}$ | coulomb | C ($1\,\mathrm{Gy} = 1\,\mathrm{A \cdot s}$) |
| differenza di potenziale | $\mathsf{M\,L^2\,T^{-3}\;I^{-1}}$ | volt | V ($1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C}$) |
| capacità elettrica | $\mathsf{M\,L^2\,T^{-4}\;I^{-2}}$ | farad | F ($1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{V/C}$) |
| resistenza elettrica | $\mathsf{M\,L^2\,T^{-3}\;I^{-2}}$ | ohm | $\Omega$ $1\,\Omega = 1\,\mathrm{V/A}$) |
| conduttività | $\mathsf{M^{-1}L^{-2}\,T^3\;I^2}$ | siemens | S ($1\,\mathrm{S} = 1\,\Omega^{-1}$) |
| flusso magnetico | $\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}\;I^{-1}}$ | weber | Wb ($1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{V \cdot s}$) |
| densità di flusso magnetico | $\mathsf{M\,T^{-2}\;I^{-1}}$ | Tesla | T ($1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$) |
| induttanza | $\mathsf{M\,L^2\,T^{-2}\;I^{-2}}$ | henry | H ($1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A}$) |
| temper. Celsius | $\Theta$ | grado Celsius | °C ($1\,^\circ\mathrm{C} = 1\,\mathrm{K}$) |
| flusso luminoso | $\mathsf{J}$ | lumen | lm ($1\,\mathrm{lm} = 1\,\mathrm{cd \cdot sr}$) |
| illuminazione | $\mathsf{L^{-2}J}$ | lux | lx ($1\,\mathrm{lx} = 1\,\mathrm{lm/m^2}$) |



Tabella 2: Grandezze derivate del Sistema Internazionale con nomi propri.

## 6.3

**Esempi di forze**:

1. *Forza gravitazionale* (di Newton) fra due corpi:

$$F = -G\frac{m_1\,m_2}{d^2} \tag{19}$$

   con $m_1$ e $m_2$ la massa (gravitazionale) dei due corpi, $d$ la loro distanza (fra i loro 'centri' se si tratta di corpi estesi — un concetto che sarà chiarito nel seguito) e $G$ una costante opportuna (*costante gravitazionale*) tale che se le masse sono espresse in kg e la distanza in m, la forza risultante sarà in Newton (N): $G = 6.67300 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} = 6.67300 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$.
   Il segno negativo sta ad indicare che la forza è *attrattiva*.
   Nota: abbiamo incontrato la 'massa', nella seconda legge di Newton, con il significato di inerzia. Ora la incontriamo con il significato di 'carica gravitazionale', in analogia alle cariche elettriche. Quindi, queste due 'masse' fanno riferimento, in linea di princio, a due concetti diversi: *massa inerziale* e *massa gravitazionale*. Sperimentalmente massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali e quindi scriviamo semplicemente $m$ anche nella (19), inglobando il fattore di proporzionalità nella costante fravitazionale $G$.

2. *Forza gravitazionale* di un corpo sulla terra

$$F = -m\,g\,, \tag{20}$$

   con $g \approx 0.980\,\mathrm{m/s^2}$ (varia fra $g \approx 0.973\,\mathrm{m/s^2}$, all'equatore, a $g \approx 0.983\,\mathrm{m/s^2}$, ai poli). Se assumiamo, come vedremo essere vero, che che la forza fra un corpo sulla superficie della Terra e la Terra stessa sia uguale a quella fra due corpi a distanza $R_T$ (raggio terrestre), ovvero *come se* la massa della terra fosse concentrata al suo centro, otteniamo

$$F = -G\frac{m\,M_T}{R_T^2} = -m\,g\,, \tag{21}$$

$$\rightarrow \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2}\,, \tag{22}$$

con[1] $R_T = 6\,371\,\mathrm{km}$ e $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

3. *Forza elettrostatica* (di Coulomb) fra due corpi carichi:

$$F = k_0 \frac{Q_1\,Q_2}{d^2} \tag{23}$$

ove $Q_1$ e $Q_2$ sono le cariche espresse in Coulomb (C), $d$ come sopra e $k_0$, altra costante, di valore $k_0 = 9 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.
Si noti come questa forza può essere repulsiva o attrattiva a seconda del segno relativo delle cariche.

4. *Forza elastica* (di una molla)

$$F = -k\,x\,, \tag{24}$$

ove $x$ è preso dalla posizione di equilibrio (a volte si incontra $\Delta x$ invece di $x$, ad indicare che si tratta di una differenza rispetto a $x_0$ di equilibrio) e $k$ è una costante, dipendente dalla molla, di unità N/m.
La forza è negativa se $x$ è positivo, positiva se $x$ è negativo, in quanto è una *forza di richiamo* verso la posizione di equilibrio $x = 0$.

## 6.4

**Commenti su attrazione terrestre**: chi attrae chi? Azione e reazione. Rapporto delle accelerazioni di un oggetto piccolo attratto dalla Terra e della Terra attratta da un piccolo oggetto: $a_T/a_m = -m/M_T$.
Massa inerziale, massa gravitazionale e caduta dei gravi con pari accelerazione $g$.

## 6.5

**Reazioni vincolari**: valutazione delle forze dal bilancio delle forze note e da considerazioni cinematiche → "le forze che mancano per far tornare $F = m\,a$": esempio di peso poggiato su un tavolo.

[1] Essendo la terra schiacciata ai poli, il 'raggio' non è ben definito. Il valore 6 371 km è 'una sorta' di valore medio, più precisamente è il raggio di una sfera di volume pari a quello della Terra. Il raggio equatoriale (ovvero raggio dell'equatore e anche distanza superficie-centro Terra all'equatore) vale 6 378 km. Il raggio polare (più precisamente la distanza polo-centro) à pari a 6 356 km. Comunque, per quello che ci riguarda per gli esercizi, $R_T = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ va più che bene.

### 6.6

Esperimentini in classe con elastici e molla. Misura dell'intensità delle forze mediante molle opportunamente tarate → *dinamometro*. Bilancio della forze agenti su oggetto posato sul tavolo:

$$\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{F} = 0 \rightarrow \{F_x = 0, F_y = 0\}\,,$$

ove si è indicata con $x$ la componente orizzontale e con $y$ la componente verticale (quest'ultima viene anche indicata con $z$, o anche semplicemente con $x$ se il moto è unidimensionale: fare attenzione e cercare di capire dal contesto — comunque, la Fisica è indipendente dai simboli usati). Da queste condizioni cercare di capire dalle forza note che agiscono sul corpo quali sono le altre forze in gioco.

- Semplice caso di oggetto semplicemente posato. Lungo la verticale ci deve essere la forza peso $F_p = -mg$ (diretta verso il basso) e quindi una forza uguale e contraria dovuta al tavolo ($T$): $T + F_p = 0$, ovvero $T = mg$. Non vediamo nessuna forza sul piano orizzontale (o se ci sono, sono comunque uguali e contrarie). Più esattamente

  $$\vec{F} \;=\; \{0,\ T - mg\} = \{0,\ 0\}. \tag{25}$$

  **Principio di azione e reazione** (terzo principio della meccanica o terza legge di Newton): $\vec{F}_A^B = -\vec{F}_B^A$.
  Esempi

  - Oggetto esercita una forza $-mg$ sul tavolo ⇔ tavolo esercita forza $mg$ sull'oggetto.
  - Terra esercita una forza sulla Luna (l'attrae verso di sé) ⇔ la Luna esercita la stessa forza sulla Terra (l'attrae verso di sé): forze uguali e contrarie.
  - etc. etc.

Analisi delle forze di corpo appoggiato su bilancia e tenuto da elastico.

#### 6.6.1

Altra applicazione di $\vec{a} = \vec{F}/m$: proiettile con velocità $v_0$ ed angolo $\alpha$ rispetto al piano orizzontale. Forze da quando l'oggetto si stacca da chi lo ha lanciato: $\vec{F} =$

$(0, -mg) \;\rightarrow\; \vec{a} = (0, -g)$: moto rettilineo uniforme lungo la $x$, uniformemente accelerato lungo la $y$ (verticale).

Soluzione 'fisica' del problema della gittata: proiettile con velocità $v_0$ ed angolo $\alpha$ rispetto al piano orizzontale.

- Il tempo che il proiettile impiega ad arrivare nel punto più alto è pari al tempo che impiega la componente verticale della velocità ad annullarsi:

$$t_s = \frac{v_{0_y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,. \tag{26}$$

- Per simmetria, il proiettile impiega lo stesso tempo a tornare sul piano orizzontale, quindi il 'tempo di volo' totale vale

$$t_v = 2\,\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{27}$$

- In questo tempo la componente orizzontale è avanzata di

$$\Delta x = v_{0_x}\, t_v = \frac{2\, v_0^2 \sin\alpha\, \cos\alpha}{g} \tag{28}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha\,, \tag{29}$$

  ove è stata utilizzata la formula trigonometrica $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

- Gittata massima: $\rightarrow \alpha = \pi/4$ ($45^o$)

- Angolo di impatto: per simmetria uguale ad angolo di lancio; oppure dalle componenti del vettore velocità, che sono $v_0 \cos\alpha$ e $-v_0 \sin\alpha$.

- Altezza massima raggiunta:
  - velocità da quando parte a quando è nel punto più in alto, varia linearmente, con valore medio $(v_0 \sin\alpha)/2$;
  - lo spazio persorso fino al punto più alto è quindi pari alla velocità media per il tempo che ci mette ad arrivare in alto:

$$y_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{2} \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{30}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2\,g} = \frac{v_{0_y}^2}{2\,g}\,. \tag{31}$$

Quest'ultima formula ci dà l'espressione generale dello *spazio di frenata*:

$$\frac{v_0^2}{2\,|a|}\,, \tag{32}$$

anche uguale allo spazio percorso affinché arrivi, con accelerazione costante, a $v_0$.
**Nota di sicurezza stradale:** a parità di forza frenante del veicolo, lo spazio di frenata va come il quadrato della velocità iniziale. A tale spazio va aggiunto quello, dovuto ai riflessi, prima che si cominci a frenare.

- Ragionamenti dimensionali per ottenere $d \propto v_0^2/|a|$.
- Grafico orario $y(t)$ e traiettoria $y(x)$: ragione della similarità delle curve: $v \propto t$: fra le ascissi dei grafici $y(t)$ e $y(x)$ cè solo un cambiamento di scala: la scala viene allungata o strizzata a secondo della velocità lungo $x$, costante durante il moto.

## 6.7

Un corpo di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ è appeso ad una corda. Calcolare la tensione della corda (ovvero la forza con la quale si sorregge il corpo) quando:

I) il corpo è fermo;

II) il corpo cade con accelerazione $9.8\,\mathrm{m/s^2}$;

III) il corpo sale con accelerazione di $9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

Prendendo il riferimento verso l'alto, questo è il bilancio delle forze, da cui l'accelerazione:

$$F = T - mg \tag{33}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{T}{m} - g\,. \tag{34}$$

Le osservazioni sulla cinematica ci danno $a$ (rispettivamente 0, $-g$ e $g$, dai dati del problema), da cui ci ricaviamo $T$:

$$T = m\,a + m\,g \tag{35}$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
a = 0 \quad &\rightarrow \quad T = m\,g && (36)\\
a = -g \quad &\rightarrow \quad T = 0 && (37)\\
a = g \quad &\rightarrow \quad T = 2\,m\,g\,. && (38)
\end{aligned}
$$

Esperimentini in classe per giustificare il risultato. Domanda: se avete una busta della spesa il cui manico sta cedendo, cosa conviene fare? 1) proseguire tranquillamente; 2) abbassare rapidamente la busta; 3) alzarla bruscamente.

## 6.8 Problemi

1. Conoscendo $g$ sulla Terra, pari a $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, calcolare l'accelerazione di gravità $g'$ (dovuta al solo campo gravitazionale terrestre) di un corpo distante 400000 km dalla Terra

2. Due cariche uguali, distanti 1 m, si respingono con una forza di 1 N. Quanto vale la loro carica?

3. Corpo do massa $m_1$ sospeso e legato, mediante 'filo inestensibile e senza peso' che passa per 'carrucola ideale', a massa $m_2$ posta su piano orizzontale privo di attrito. Determinare accelerazione delle due masse e tensione del filo in funzione del rapporto delle masse.

4. Trenino di $n$ carrelli (es. $n = 3$) di uguale massa, che possono scivolare su piano orizzontale prino attrito. Sapendo che al primo carrello viene applicata una forza $F$, orizzontale, calcolare l'accelerazione del trenino e la tensione del filo fra un carrello e l'altro.

# 7 Lunedi 19/3, 16:00–18:00

## 7.1

Punto situazione, con ripasso generale su moti 1D e 2D, incluso moto circolare uniforme e oscillatore armonico.
Esperimento con ombrello: attrito di viscosità dipendente dalla velocità: $F = -f(v)\hat{v} \rightarrow -\beta\vec{v}$.
Esperimento molla

## 7.2

Esperimento della molla. Dati sperimentali AA. 04/05 ( $\Rightarrow$ **provare a fare i conti!**).

| | A.A. 04/05 | | | | A.A. 05/06 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| # dischi | $x$ (s) | T (s) | | | $x$ (s) | $T$ (s) |
| | | cr1 | cr2 | cr3 | | |
| 0 | 1.8 | — | — | — | | |
| 1 | 1.8 | — | — | — | | |
| 2 | 1.8 | — | — | — | | |
| 3 | 3.3 | 0.481 | 0.449 | 0.491 | | |
| 4 | 4.9 | 0.539 | 0.566 | 0.560 | | |
| 5 | 6.8 | 0.603 | 0.623 | 0.617 | | |
| 6 | 8.5 | 0.664 | 0.693 | 0.672 | | |
| 7 | 10.0 | 0.692 | 0.721 | 0.717 | | |
| 8 | 11.8 | 0.757 | 0.777 | 0.770 | | |
| 9 | 13.4 | 0.793 | 0.806 | 0.810 | | |
| 10 | 15.1 | 0.846 | 0.875 | 0.846 | | |

ove $x$ è la posizione del punto terminale della molla, $\mathrm{cr}_i$ rappresentano i valori ottenuti dai tre cronometristi volontari e ogni dischetto pesa 79 g.
Osservazione della linearit` dell'allungamento in funzione della massa applicata (e quindi della forza applicata). Considerazioni dinamiche. Determinazione della costante $k$ della molla.

**Analisi della molla**: Se la lunghezza iniziale[2] era $L_0$ e aggiungo una massa $m \rightarrow$ posizione di equilibrio $L_{eq}$, tale che forza elastica bilancia forza di gravità. Con riferimento verso il basso:

$$mg - k\,(L_{eq} - L_0) \;=\; 0\,. \tag{44}$$

Per una generica posizione $L = L_{eq} + x$

$$\begin{aligned} F_x &= mg - k\,(L - L_0) = mg - k\,(L_{eq} + x - L_0) & (45)\\ &= mg - k\,(L_{eq} - L_0) - k\,x & (46)\\ F_x(x) &= -k\,x\,. & (47) \end{aligned}$$

Ricordando "$F = m\,a$", otteniamo

$$a_x(x) = -(k/m)\,x\,, \tag{48}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} \;=\; -\frac{k}{m}\,x\,. \tag{49}$$

$\Rightarrow$ Ricorda qualcosa?

[2]In realtà, non è necessario assumere una completa linearità della molla (che fra l'altro non puè esistere per sollecitazioni troppo piccole o troppo grandi). Assumiamo di avere una generica espressione della forza in funzione dell'allungamento: $F(L) = f(L)$, tale che, comunque, data una certa forza applicata $mg$ l'allungamento di equilibrio sia per $L_{eq}$, ovvero

$$mg - f(L_{eq}) \;=\; 0\,. \tag{39}$$

Sviluppando in serie $f(L)$ intorno a $L_{eq}$ e chiamando $x$ la differenza fra $L$ e $L_{eq}$ (come nel testo), abbiamo:

$$F(L_{eq} + x) \;=\; f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x\,, \tag{40}$$

da cui la forza totale

$$\begin{aligned} F_x &= mg - F(L_{eq} + x) = mg - \left[ f(L_{eq}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x \right] & (41)\\ &= [mg - f(L_{eq})] - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}} x & (42)\\ F_x(x) &= -k\,x\,, & (43) \end{aligned}$$

con $k = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{L_{eq}}$.

## 7.3

**Pozzo per il centro della Terra**. Forza gravitazionali fra corpi non puntiformi: $\vec{F} = \sum_i F_i = \sum_i \frac{G\mu_i\, m}{r_i^2}\hat{r}_i$ (se $m$ è di un corpo puntiforme). Attrazione gravitazionale fra una massa distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera e un punto materiale interno o esterno ad essa (consequenze del teorema di Gauss: dimostrato a lezione che gusci sferici aventi densità di massa uniforme non producono alcuna forza su masse all'interno di essi). Applicazione al problema del 'pozzo per il centro della Terra': forza gravitazionale in funzione della distanza $R$ dal centro della Terra.

$$
\begin{aligned}
F(R) &= -\frac{G\,M(R)\,m}{R^2} &(50)\\
&= -\frac{G\,\rho\,V(R)\,m}{R^2} &(51)\\
&= -\frac{G\,\rho\,4/3\,\pi\,R^3\,m}{R^2} &(52)\\
&= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,R &(53)
\end{aligned}
$$

ove $\rho$ indica la densità della terra ($5.5\,10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Questa espressione è valida nella metà del pozzo da noi al centro della Terra. Per estenderla nella seconda metà, sostituiamo nella formula $R$ con $r$, indicando con quest'ultima una coordinata lungo il pozzo, che ha origine nel centro della Terra e verso positivo verso di noi:

$$
F(r) = -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r. \qquad (54)
$$

Si può verificare facilemente che in entrambe le metà del pozzo (corrispondneti a $r > 0$ e $r < 0$) la forza è sempre diretta verso il centro della Terra.

Da "$F = m\,a$" e ricordandoci che si tratta di un'accelerazione lungo il raggio, segue

$$
\begin{aligned}
a_r(r) &= -\frac{4}{3}\,\pi G\,\rho\,m\,r, &(55)\\
&= -\frac{g}{R_T}\,r\,, &(56)
\end{aligned}
$$

ove l'ultima espressione è stata ottenuta ricordandoci che sulla superficie della Terra, ovvero per $r = R$, deve valere $a_r(R_T) = -g$, ovvero $-\frac{4}{3}\,\pi\rho\,G\,R_T = -g$, la quale ci permette di sostituire $g/R_T$ a $-\frac{4}{3}\pi\rho\, G$ (bastava anche semplicemente pensare che l'accelerazione è lineare in $r$ e per $r = R_T$ sappiamo che vale $-g$). Riscrivendo $a_r$ come derivata seconda rispetto ad $r$, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2} = -\frac{g}{R_T}\, r\,, \tag{57}$$

⇒ Ricorda qualcosa?

### 7.4 Attrito statico e dinamico

Bilancio delle forze quando un oggetto è posato sul tavolo, tirato da un elastico, ma rimane fermo.
Osservazioni sperimentali:

- molla si allunga, ma l'oggetto rimane fermo;
- oltre un certo allungamento l'oggetto comincia a muoversi
- se si traina l'oggetto con velocità costante (non facile con il tipo di 'esperimento povero') si nota che l'elastico rimane allungato, ma (osservando bene) è un po' meno allungato dell'ultimo istante in cui l'oggetto era ancora fermo.

In entrambi i casi $a_x = 0$, ovvero $F_x = 0$, pur avendo una 'forza attiva' $F_a \neq 0$ (la forza con cui tiriamo il corpo mediante l'elastico): ci deve essere una forza resistente! **Forza di attrito**.

Variazioni sul tema:

- appesantiamo l'oggetto
- cambiamo superficie di contatto (peso appoggiato su lucidi e su righelli)
- una volta che il corpo si muove, proviamo a farlo andare con accelerazione costante (non facile!)

Attrito statico e dinamico. Dipendono dalle proprietà fisiche delle superfici di contatto (rugosità) e dalla forza normale alla piano (nel caso di piano orizzontale essa è semplicemente la forza peso). Non dipendono invece dall'estensione delle superfici di contatto. La dipendenza dalle proprietà fisiche delle superfici di contatto è modellizzata con un *coefficiente di attrito*

**Attrito statico** Va trattato alla stessa stregua di altre forze vincolari, come la forza che un tavolo esercita su un oggetto poggiato su di esso, la tensione di un filo inestensibile a cui è appeso un oggetto i binari che guidano i treni o le guide degli scivoli dei bambini. La forza dovuta ad essi è variabile e va ricavata dalla cinematica e dalle altre forze in gioco, ma non può eccedere un *limite di rottura*, in senso generico. (Ovviamente la trattazione elementare è grossolana, in quanto in pratica i vincoli si deformano, in particolarità in prossimità del limite di rottura (si immagini ad una corda a cui si appende un peso via via crescente.)

Nel caso dell'attrito statico il 'limite di rottura' è dato dalla forza massima che esso può esercitare:

$$F_{A_s} \leq \mu_s F_N \quad (58)$$

ove $\mu_s$ è il coefficiente di attrito statico e $F_N$ la forza normale alla superficie. Direzione e verso vanno ricavati dalle altre forze in gioco. Nel caso di piano orizzontale e la sola forza che l'oggetto esercita sulla superficie è la forza peso si ha

$$F_{A_s} \leq \mu_s m g\,. \quad (59)$$

**Attrito dinamico** (Vedi punto 5 nell'elenco delle forze lezione 6/3/06). Riassumendo:

$$F_{A_d} = -\mu_d F_N \hat{v} \quad (60)$$

piano orizz., forza su piano $mg$ :

$$F_{A_d} = -\mu_d m g \hat{v} \quad (61)$$

## 7.5 Problemi

### 7.5.1 Problemi della volta scorsa (per controllo — non svolto a lezione)

**Problema** del peso sul tavolo (liscio) tirato, mediante filo e opportuna carrucola, da un peso soggetto sospeso.
Bilancio delle forze:

- Su $m_1$ agisce la forza di gravità e la reazione del filo. Scegliendo il verso positivo verso il basso:

$$F_i = m_1 g - T_1\,. \quad (62)$$

- Su $m_2$, che può scivolare sul tavolo:
  - Componente verticale (normale alla superficie del tavolo): la forza peso $m_2\, g$ è bilanciata dalla reazione del tavolo $\rightarrow$ forza totale nulla.
  - Componente orizzontale solo tensione del filo, diretta verso la carrucola: $F_2 = T_2$
- Ruolo della carrucola 'ideale', ovvero senza massa e senza attriti: serve solo a cambiare direzione e verso di applicazione della forza: $\rightarrow$ il problema è equivalente a quello in cui $F_1$ (sulla massa $m_1$ e fisicamente verticale) e $F_2$ (sulla massa $m_2$ e orizzontale) sono colineari (ad esempio si immagini $m_i$ sullo stesso piano ove scivola $m_2$, ma con la forza peso che lo tira verso destra e la tensione della corda verso sinistra).
- Principio di azione e reazione: $T_1 = T_2 = T$

Possiamo quindi trattare il problema unidimensionalmente e scrivere semplicemente

$$\begin{aligned} F_1 &= m_1 g - T && (63)\\ F_2 &= T && (64) \end{aligned}$$

da cui seguono le accelerzaioni

$$\begin{aligned} a_1 &= g - \frac{T}{m_1} && (65)\\ a_2 &= \frac{T}{m_2} && (66) \end{aligned}$$

ma, dato il vincolo di inestensibilità del filo, istante per istante la loro distanza è costante, ovvero i due corpi si muovono alla stessa velocità e con la stessa accelerazione: $a_1 = a_2 = a$, da cui:

$$\begin{aligned} a &= g - \frac{T}{m_1} && (67)\\ a &= \frac{T}{m_2}\,. && (68) \end{aligned}$$

Risolvendo le due equazioni in due incognite otteniamo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, g && (69)\\ a &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, g\,. && (70) \end{aligned}$$

Per capire se la soluzione è ragionevole è conveniente fare opportuni *limiti*, ovvero vedere se recuperiamo casi estremi alla cui soluzione arriviamo intuitivamente (**Abituarsi, specialmente per le applicazioni pratiche, a fare questo tipo di ragionamento!** Questo è praticamente l'unico modo per capire se iil risultato è ragionevole nei casi in cui non è dato di conoscere 'la soluzione' del problema, come succede sempre nella vita pratica: i problemi con la soluzione in fondo si incontrano solo nei libri di testo!)

- Limite per $m_2 \to \infty$ (ovvero, in pratica, $m_2 \gg m_1$):

$$T = m\,g \tag{71}$$
$$a = 0\,. \tag{72}$$

  ovvero il sistema le masse non si muovono, e la tensione è semplicemente quella che bilancia la forza peso su $m_1$: **OK**.

- Limite per $m_2 \to 0$ (ovvero, in pratica, $m_2 \ll m_1$):

$$T = 0 \tag{73}$$
$$a = g\,. \tag{74}$$

  $m_1$ cade con l'accelerazione di gravità $g$ e si trascina $m_2$, che non oppone resistenza: **OK**.

Altro modo (da fisici) di risolvere il problema: sul sistema agisce la forza esterna $m_1\,g$ ed il sistema ha un'inerzia totale $m_1 + m_2$, da cui $a = m_1\,g/(m_1 + m_2)$.

### 7.5.2

Variazioni sul tema e **problemi proposti**:

1. Cosa succede, nel secondo problema se $m_2$ scivola con attrito, essendo il coefficiente di attrito $\mu_d$?

2. Si immagini, sempre sullo stesso problema, che sia dato il valore $m_2$, inizialmente ferma e che fra $m_2$ e tavolo sia presente attrito, il cui coefficiente di attrito statico vale $\mu_s$: trovare il valore di massimo di $m_1$ tale che i due corpi rimangano fermi.

3. Si immaginino quattro carrellini, tutti della stessa massa $m$ e allineati su un tavolo che non offre attrito, collegati dai soliti fili inestensibili e senza peso. Al primo carrellino viene applicata, dall'esterno, una forza $F$, tale da trascinare il convoglio. Determinare l'accelerazione del trenino di carrellini e le tensioni dei fili fra i vari carrellini. Estendere la soluzione al caso di $n$ carrellini.

4. Modificare il problema precedente, aggiungendo un attrito dinamico fra carrellini e piano del tavolo.

## 7.6 Altri problemi

1. Approssimiamo la forza di resistenza dell'aria che frena la caduta di un paracadutista ad una forza di viscosità $-\beta\,\vec{v}$, con $\beta = 98\,\mathrm{kg/s}$. Sapendo che il paracadutista (con equipaggio) ha una massa di 100 kg, trovare la velocità limite di caduta (ovvero quando il paracadutista scende in modo rettilineo uniforme).

2. Un elastichetto si allunga di 10 cm se ad esso viene sospesa una massa di 100 g. Successivamente la massa viene abbassata di 5 cm e quindi lasciata libera ed essa comincia ad oscillare. Calcolare quante oscillazioni esegue in 10 s.

3. Sul problema precedente: dare le espressioni di $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ (usando l'analogia con le oscillazioni delle coordinate in un moto circolare uniformeme.). Trovare inoltre quanto valgono velocità massima ed accelerazione massima durante le oscillazioni.

4. Una sfera di raggio $R$ ha una massa di 300 g. Calcolare la massa di una sfera dello stesso materiale della precedente, ma di raggio $3\,R$.

5. Sul problema del pozzo per il centro della Terra:

   (a) calcolare il periodo di oscillazione;

   (b) calcolare la velocità quando il corpo transita per il centro della Terra;

   (c) calcolare il tempo impiegato ad arrivare dalla superficie terrestre al centro della Terra:

   (d) calcolare a che velocità viaggia il corpo quando la sua accelerazione vale $g/2$.

6. Viene eseguito un esperimento con il quale si determina che un elastico si allunga di 20 cm quando si appende ad esso una massa di 2,7 kg. Successivamente con l'elastico si tira un oggetto di 1 kg appoggiato su un tavolo con attrito e si misura che nell'istante in cui l'oggetto comincia a muoversi l'elastico si è allungato di 10 cm. Determinare la forza di attrito oggetto-tavolo.

7. Sul problema precedente: di quanto si allunga l'elastico se sull'oggetto iniziale se ne pone un altro di massa pari a 500 g?

8. Un corpo di 2 kg, posto su un piano orizzontale con attrito, viene spinto con una forza costante di 1 N. Sapendo che l'attrito dinamico oggetto-tavolo vale $\mu_D = 0.25$, determinare l'accelerazione a cui è soggetto il corpo.

9. Un corpo di 1 kg che viaggia orizzontalmente a una velocità di 2 m/s, arriva su una superficie orizzontale che presenta attrito. Il corpo si ferma in un metro. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico.

# 8 Venerdi 23/3, 16:00–18:00

## 8.1

Correzione di alcuni problemi assegnati: carrelli con carrucole, con e senza attrito.

## 8.2

Analisi di problemi con forza centrifuga di varia natura (elastica, attrito statico, gravitazionale)

### 8.2.1

Caso di macchina in curva: forza centripeta è esercitata dall'attrito *statico* sulla superficie di contatto ruote-asfalto (le ruote, in condizioni normali, non scivolano!). Forza centripeta massima sarà quindi uguale alla massima forza di attrito statico, che vale, per fondo stradale orizzontale, $\mu_S\, m\, g$:

$$F_c = m\,\omega^2\,R = m\,\frac{v^2}{R} \;\leq\; \mu_S\, m\, g \tag{75}$$

$$\rightarrow \quad \frac{v^2}{R} \;\leq\; \mu_S\, g \tag{76}$$

che ci dà una condizione fra velocità e raggio di curvatura, noto il coefficiente di attrito statico. In particolare, fissato il raggio di curvatura troviamo la velocità massima e fissata la velocità troviamo il raggio minimo:

$$v \leq \sqrt{\mu_S \, R \, g} \tag{77}$$

$$R \geq \frac{v^2}{\mu_S \, g} \,. \tag{78}$$

### 8.2.2

Caso in cui la forza centripeta è attribuibile alla forza gravitazionale:
→ Orbite circolari di satelliti:

$$\begin{aligned} \text{considerazioni cinematiche + "}F = m\,a\text{"} &\rightarrow \text{acc. centrip.} && (79)\\ &\rightarrow \text{forza. centrip.} && (80)\\ &\rightarrow F_c = -m\,\omega^2\,R = -m\,\frac{v^2}{R} && (81)\\ \text{legge di gravitazione universale} &\rightarrow F_G = -\frac{G\,M\,m}{R^2}\,. && (82) \end{aligned}$$

Ma essendo la forza di gravità l'unica forza che può essere responsabile della forza centripeta:[3]

$$F_c = F_G \tag{83}$$

$$-m\,\omega^2\,R = -\frac{G\,M\,m}{R^2}\,. \tag{84}$$

Ne segue:

$$\omega^2\,R = \frac{G\,M}{R^2} \tag{85}$$

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{G\,M}{R^3} \tag{86}$$

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} R^3 \tag{87}$$

$$T^2 \propto R^3 \tag{88}$$

$$v \propto 1/\sqrt{R} \tag{89}$$

[3]Insistiamo sul fatto che l'espressione $F_c = F_G$ non vuol dire che "$F_c$ è equilibrata da $-F_G$, *come se ci fossero in gioco due forze.* La forza in gioco è una sola, $F_G$, che, in un moto circolare uniforme "viene vista come" (o "le viene dato il nome di") forza centripeta. Per dirla ancora in un altro modo, $F_c = F_G$ va letta come "$F_c$ è $F_G$".

($\Rightarrow$ “Terza legge di Keplero”, valida in generale per orbite ellittiche, previa sostituzione del raggio $R$ con semiasse maggiore, qui dimostrata solo per caso particolare di orbite circolari.)

### 8.3

Di nuovo osservazione di oggetto fermo sul tavolo, tirato mediante elastico ma tenuto fermo da forza di attrito statico:

- inventario delle forze ($\vec{a} = 0!$): quattro forze in totale, che si bilanciano due a due. In particolare, due di queste sono di tipo vincolare (reazione del piano tel tavolo verso l'alto e forza di attrito statico orizzontale);
- inventario di quattro oggetti che subiscono le forze uguali e contrarie, secondo il principio di azione/reazione: Terra, mano che tira e tavolo (due volte: normale e orizzontale). Esperimento interponendo fra l'oggetto e il tavolo un foglio: oggetto$\rightarrow$foglio$\rightarrow$tavolo: la forza di attrito statico permette al corpo di trascinare il foglio (non il tavolo solo perché molto più pesante).

Cosa succede se si inclina il piano di appoggio? Fino ad un certo angolo l'oggetto sta fermo, poi comincia a scivolare.
**Deposizione forze** si basa sul principio che se l'effetto di tante forze che agiscono su un punto materiale è esattamente uguale ad una sola forza, uguale alla somma vettoriale delle varie forze, allora una forza può essere sempre vista come somma di altre. Questa modellizzazione è utile in quanto una della componenti può essere bilanviata da una forza nota o da una reazione vincolare e quindi il movimento dipende solo dalle componenti non bilanciate.

**Piano inclinato** e decomposizione della forza peso in componente tangenziale e componente normale al piano:

$$F_{G_n} = m\,g\,\cos\alpha \tag{90}$$
$$F_{G_t} = m\,g\,\sin\alpha\,, \tag{91}$$

ove $\alpha$ è l'angolo rispetto al piano orizzontale. Ovviamente in questi problemi didattici, si assume che il piano inclinato sia indeformabile e quindi c'è una reazione vincolare normale al piano inclinato indipendentemente da $mg$, ovvero:

$$F_{G_n} + T = 0\,. \tag{92}$$

Si noti che nell'analisi del piano inclinato è conveniente considerare un sistema di riferimento con la $x$ lungo il piano con verso positivo tipicamente verso il basso e asse $y$ ortogonale al piano inclinato. Quindi quest'ultima equazione si era lungo l'asse $y$ e non entra nell'equazione del moto dell'oggetto.
Per il moto lungo il piano si hanno i tre casi notevoli: assenza di attrito; corpo fermo per effetto di attrito statico; corpo che scivola frenato da attrito dinamico.

- **Piano inclinato senza attrito**

$$F_t = m\,g\,\sin\alpha \tag{93}$$
$$a_t = g\,\sin\alpha \tag{94}$$

$\rightarrow$ moto uniformemente accelerato con accelerazione $g\,\sin\alpha$.

- **Piano inclinato** con corpo tenuto fermo da **attrito statico**:

$$m\,g\,\sin\alpha - F_{A_s} = 0\,. \tag{95}$$

Massimo valore di $\alpha$ corrisponde al massimo valore che può avere l'attrito statico prima che "il vincolo sia rotto":

$$F_{A_s} \leq \mu_s\,m\,g\,\cos\alpha\,. \tag{96}$$

Dalle (95) e (96) abbiamo

$$F_{A_s} = m\,g\,\sin\alpha \leq \mu_s\,m\,g\,\cos\alpha \tag{97}$$
$$\sin\alpha \leq \mu_s\,\cos\alpha \tag{98}$$
$$\tan\alpha \leq \mu_s\,, \tag{99}$$

ovvero c'è attrito statico finché $\alpha \leq \mathrm{atan}\,\mu_s$. Questa relazione permette di ricavarsi $\mu_s$ dall'angolo massimo $\alpha_{max}$ in cui il corpo sta ancora fermo: $\mu_s = \tan\alpha_{max}$.

- **Piano inclinato con attrito dinamico**

$$F_t = m\,g\,\sin\alpha - \mu_d\,m\,g\,\cos\alpha \tag{100}$$
$$a_t = g\,\sin\alpha - \mu_d\,g\,\cos\alpha\,. \tag{101}$$

## 8.4

Moto del **pendolo**: massa $m$ legata ad un punto da un filo inestensibile di lunghezza $l$ e massa trascurabile. Coordinata curvilinea $s$ lungo la circonferenza, con $s = 0$ in corrispondenza della verticale e verso positivo quando l'angolo $\alpha$ è "a destra". Scomposizione delle forze:

$$\begin{aligned} m\,g\cos\alpha &\Rightarrow \text{compensata dalla tensione del filo} && (102)\\ -m\,g\sin\alpha &\Rightarrow \text{forza tangente} \Rightarrow \text{moto di}\, m. && (103) \end{aligned}$$

Di nuovo, da "$F = m\,a$", segue

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\alpha && (104)\\ l\frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}\,t^2} &= -g\,\sin\alpha && (105)\\ \frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}\,t^2} &= -\frac{g}{l}\,\sin\alpha\,, && (106) \end{aligned}$$

ove abbiamo usato la relazione $s = l\,\alpha$ (che deriva dalla definizione di radiante: $\alpha = s/l$). Nell'approssimazione di piccoli angoli ($\alpha \ll 1$, con $\alpha$ espresso in radianti): $\sin\alpha \approx \alpha$, ove l'approssimazione si intende valida per $\alpha \lessapprox 0.1$, ovvero $\lessapprox 5$ gradi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}\,t^2} \approx -\frac{g}{l}\,\alpha\,. \qquad (107)$$

Cosa ci ricorda?

## 8.5

Ricordiamo alcuni problemi che hanno portato a simili relazioni fra accelerazione e posizione.

- Pendolo: $\frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}\,t^2} = -\frac{g}{l}\,\alpha\,.$
- Molla: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -\frac{k}{m}\,x\,.$
- Pozzo lungo diametro terrestre: $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} = -\frac{g}{R_T}\,r\,.$

- Proiezione $x$ moto circ. unif.: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, x\,.$
- Proiezione $y$ moto circ. unif.: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, y\,.$

Sono tutte del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\, t^2} = -K\, z\,, \tag{108}$$

ove $z$ è una generica variabile dipendente dal tempo, ovvero $z(t)$ e $K$ è una costante positiva, avente le dimensioni dell'inverso del quadrato di un tempo. *Equazione differenziale*: la soluzione non è un numero (o più numeri) come nelle normali equazioni (algebriche), ma una funzione.

in virtù di questa osservazione, possiamo riscrivere la (108) nella generica

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\, t^2} = -\omega^2\, z\,. \tag{109}$$

[Check dimensionale su $\omega$: i due termini della (109) devono essere omogenei e quindi, avendo il termine a sinistra le dimensioni di $z$ diviso un tempo al quadrato, $\omega$ deve avere le dimensioni dell'inverso del tempo (ovvero espresso in $\mathrm{s}^{-1}$ nel SI).]

Confrontando con la (13) otteniamo direttamente la generica soluzione, che riscriviamo per comodità:

$$z(t) = A\, \cos(\omega t + \phi) \tag{110}$$

Si tratta solo di capire quanto valgono le costanti $A$ e $\phi$ che compaiono nella (110): essendo due incognite abbiamo bisogno di due *condizioni* (lèggi 'equazioni'): in genere $z(t=0)$ e $\dot{z}(t=0)$, ovvero coordinata e velocità iniziali.

$$z(t=0) \;=\; A\, \cos\phi \tag{111}$$

$$\dot{z}(t=0) \;=\; -A\,\omega\, \sin\phi\,. \tag{112}$$

Se scegliamo, per comodità, $t=0$ nella posizione in cui $z$ ha il valore massimo e quindi la velocità è nulla, otteniamo semplicemente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_{max} & = & A\, \cos\phi \\ 0 & = & -A\,\omega\, \sin\phi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \phi & = & 0 \\ A & = & z_{max} \end{array} \right. \tag{113}$$

ovvero

$$z(t) \;=\; z_{max}\, \cos\left(\omega\, t\right) \tag{114}$$

$$\dot{z}(t)\, [= v_z(t)] \;=\; -\omega z_{max}\, \sin\left(\omega\, t\right) \tag{115}$$

ove

- $z_{max}$ sta, nei tre problemi, per: scostamento massimo del pesetto dalla posizione di equilibrio della molla; raggio della Terra; angolo massimo del pendolo;
- mentre $\omega$ vale, rispettivamente per i tre problemi, $\sqrt{k/m}$ $\sqrt{g/R_T}$ e $\sqrt{g/l}$.
- Ne segue che il periodo $T$ vale nei tre problemi rispettivamente $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}$ e $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Significato di $\omega$: in questi problemi <u>non</u> è una vera velocità angolare: nei primi due problemi non ci sono angoli; nel terzo c'è un angolo, $\alpha$, la velocità angolare associata al quale vale però $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = -\omega\,\alpha_{max}\sin(\omega\,t)$. Il nome generale di $\omega$, comunque legato a periodo e frequenza ma non strettamente legato ad angoli fisici, è **pulsazione**. ($\omega$ è velocità dell'ipotetico moto circolare uniforme la cui proiezione è data dal moto — fisico — oscillatorio.)

**Oscillatore armonico**: si intende moto sinusoidale e si ha luogo ogni qual volta è soddisfatta la (109). Si noti come nel secondo e terzo caso il periodo non dipende dalla massa (solita storia di massa inerziale e gravitazionale che si semplificano). Si noti inoltre come nei tre problemi il periodo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione. [Si ricordi nel caso del pendolo l'isocronismo è solo approssimativo e dipende dalla validità dell'approssimazione $\sin\alpha \approx \alpha$, valida per $\alpha \lesssim 0.1$ (vedi sul sito del corso come risolvere numericamente il problema della dipendenza del periodo da $\alpha$). . Si noti inoltre come la formula $T = 2\pi/\sqrt{R_T/g}$ potrebbe trarre in inganno e far pensare che il periodo dipenda da $R_T$: ma in realtà qui $R_T$ non sta ad indicare la posizione iniziale nel pozzo, ma $g/R_T$ era soltanto un trucco per indicare in modo più semplice la combinazione $G\,M_T/R_T$.]

## 8.6

**Problemi**:

1. Satellite per osservazioni, 600 km di altezza dalla superficie terrestre: velocità; periodo dell'orbita.
2. Come riscrivere il prodotto $G\,M$ che compare in queste formule in funzione di $g$ e di $R_T$?
3. Satellite geostazionario: quanto dista dalla Terra?

4. Satellite in orbita radente sulla superficie terrestre, ignorando attrito con l'aria: a quale velocità deve andare? Quanto impiega a compiere un giro?

5. Confrontare il problema del satellite in orbita radente con problema del pozzo per il centro della terra: hanno qualcosa in comune?

6. Luna: distanza dalla Terra a partire dal suo periodo di rivoluzione intorno alla Terra.

7. Sapendo $G$ e conoscendo distanza Terra-Sole (150 milioni di km) e il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole, 'pesare il Sole'.

8. Un oggetto è fermo su un tavolo lungo 170 cm. Successivamente esso viene inclinato, facendolo ruotare intorno al lato più corto. L'oggetto comincia a scivolare quando l'altro lato corto si è alzato di 60 cm rispetto al piano orizzontale. Determinare il coefficiente di attrito statico.

9. Un corpo sta fermo su una tavola di legno finché l'angolo fra la tavola e il piano orizzontale si mantiene inferiore a 20 gradi. i) trovare il coefficiente di attrito statico $\mu_s$; 2) Calcolare quanto vale la forza dovuta all'attrito statico quando la tavola è inclinata di 10 gradi.

10. Assumendo un coefficiente di attrito statico di 0.1, determinare la frequenza minima (in giri al minuto) a cui deve ruotare un *rotor* del diametro di 5 metri affinché una persona resti attaccata alla parete quando il pavimento viene rimosso.

11. Un oggetto viene lanciato con velocità iniziale di 10 m/s su un piano inclinato di $\theta = 30^o$ e avente un coefficiente di attrito dinamico (per quell'oggetto) di $\mu_d = 0.3$. Determinare la quota massima, rispetto al piano orizzontale, al quale arriva l'oggetto.

12. Un corpo è posto a riposo al centro di una tavola orizzontale lunga 2 metri. Si conoscono i coefficienti di attrito corpo-piano: $\mu_s = 0.8$ e $\mu_d = 0.5$. La tavola viene gradualmente inclinata finché il corpo non comincia muoversi, quindi l'inclinazione rimane costante. Trovare: a) angolo massimo di inclinazione; b) tempo che il corpo impiega a raggiungere il bordo della tavola.

13. Un molla si allunga di 10 cm se si applica una forza di 10 N. Calcolare la costante elastica della molla e il periodo di oscillazione se ad essa si appende una massa di 1 kg.

14. Assumendo che l'oscillazione massima del problema precedente sia di 2 cm, calcolare la velocità massima dell'oggetto appeso alla molla.

15. Calcolare il periodo di oscillazione del problema del sasso nel pozzo per il centro della Terra e la velocità massima del sasso.

16. Un pendolo ha periodo di un secondo. Si immagini di trasportarlo su un altro pianeta avente stesso raggio della Terra e densità dimezzata. Trovare il periodo del pendolo su tale pianeta.

# 9 Lunedi 26/3, 16:00–18:00

## 9.1

Discussione problemi satelliti. Soluzione orbita radente relazione con problema con problema del pozzo per il centro della Terra: $a_c = v^2/R_T$ (pura cinematica: moto circolare uniforme); $a_c = g$ ('accelerazione centripeta e' dovuta ad acc. gravità'.). Ne segue: $v = \sqrt{g\,R_T}$, $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$, $\omega = \sqrt{g/R_T}$. Stessa pulsazione e periodo del problema del pozzo per centro Terra: quest'ultimo può essere visto come proiezione del moto del satellite in orbita radente.

## 9.2

Ancora sui problemi che hanno come soluzione oscillatore armonico.

## 9.3

Uso di **integrali**[4] della cinematica, con esercizi. Immaginiamo di conoscere la funzione con la quale l'accelerazione cambia con il tempo: $a(t)$, ad esempio $a(t) = \alpha + \beta\,t + \gamma\,t^2$, ove $\alpha = 3\,\mathrm{m/s^2}$, $\beta = -2\,\mathrm{m/s^3}$, $\gamma = 1\,\mathrm{m/s^4}$, dalle condizioni iniziali

[4]Sostanziamente faremo uso soltanto di integrali di alcune funzioni elementari: potenze (incluso il reciproco) ed esponenziale. Si noti inoltre il significato fisico che si dà alla 'costante di integrazione' che compare negli integrali definiti.

$x_0 = x(t=0) = 10\,\mathrm{m}$ e $v_0 = v(t=0) = -1\,\mathrm{m/s}$. Siamo interessati a calcolare $v(t)$ e $x(t)$. Ricordiamo quanto visto nelle prime lezioni:

$$\Delta v|_{t_1}^{t_2} = \sum_i a_i \, \Delta t_i \tag{116}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t \tag{117}$$

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t \tag{118}$$

$$v(t_2) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{119}$$

Se $t_1 = 0$, $t_2 = t$ e indichiamo $v(t=0)$ con $v_0$:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{120}$$

Analogalmente per $x(t)$:

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{121}$$

e

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t'\,. \tag{122}$$

Nel caso dell'esempio $a(t) = \alpha + \beta\,t + \gamma\,t^2$:

$$v(t) = v_0 + \alpha\,t + \frac{\beta}{2}\,t^2 + \frac{\gamma}{3}\,t^3 \tag{123}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{\alpha}{2}\,t^2 + \frac{\beta}{6}\,t^3 + \frac{\gamma}{12}\,t^4\,. \tag{124}$$

Se $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ riotteniamo le ben note formule del moto uniformemente accelerato.
Se è dato il vettore $\vec{a}(t)$, basta applicare questi ragionamente a ciascuna componente. Se, infine, è data $\vec{F}(t)$, basta ottenere $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$ e ricondursi al caso precedente.

## 9.4

**Problema del cannoncino** (lasciato come esercizio individuale): $m_c = 2\,\mathrm{kg}$, $m_p = 10\,\mathrm{g}$, $L = 20\,\mathrm{cm}$, $v_p = 200\,\mathrm{m/s}$, accelerazione costante: trovare tempo di transito nel cannoncino, accelerazione del proiettile e forza agente sul proiettile. Trovare inoltre accelerazione del cannoncino e sua velocità finale (si suppone sia libero di scibolare sul piano).

- 0-200 m/s ad $a_p$ costante nei 20 cm del cannone: $\rightarrow v_m = 100\,\mathrm{m/s}$; tempo impiegato ad attraversare il cannone:[5] $\Delta t = L/v_m = 2\times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{ms}$. Da cui accelerazione $a_p = \Delta v/\Delta t = 10^5\,\mathrm{m/s^2}$ (=10000 $g$: una cannonata!).

- [Oppure usando la formula della 'frenata', viste precedentemente:

$$s = \frac{v^2}{2\,a} \tag{125}$$

$$a = \frac{v^2}{2\,s} = \frac{v}{2}\frac{v}{s}\,, \tag{126}$$

che, come si vede, porta allo stesso risultato.]

- Forza che ha agito sul proiettile: $F_p = m_p\, a_p = 1000\,N$.

- Ma una forza uguale a contraria agisce sul cannoncino nello stesso tempo.

$$F_c = -F_p \tag{127}$$

$$a_c = \frac{F_c}{m_c} = -\frac{m_p}{m_c}\,a_p \tag{128}$$

$$v_c = a_c\Delta t = -\frac{m_p}{m_c}\,a_p\Delta t = -\frac{m_p}{m_c}\,v_p. \tag{129}$$

Si noti la relazione:

$$v_c\, m_c = -m_p\, v_p\,, \tag{130}$$

ovvero

$$v_c\, m_c + m_p\, v_p = 0. \tag{131}$$

[5] In realtà, se il cannoncino si è mosso, lo spazio percorso nel cannoncino è un po' di meno, ed anche il tempo di percorrenza. Ma, come vedrfemo, il risultato finale che ci interessa (velocità finale del cannoncino) è indipendente dal tempo di interazione

## 9.5

Per capire meglio il significato di queste combinazioni "$m_i\, v_i$" che compaiono in queste formule, ripartiamo da "$\vec{F} = m\,\vec{a}$", usando il generico simbolo $m$ per la massa (immaginiamo del proiettile, ma è irrilevante):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} && (132)\\ &= \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} && (133)\\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} && (134) \end{aligned}$$

avendo chiamato indicato $\vec{p} = m\,\vec{v}$ la **quantità di moto** dell'oggetto di massa $m$. Questo è un altro modo (quello orininario di Newton!) di introdurre il secondo principio della meccanica.
Se $\vec{F}$ è costante segue

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} &= \vec{F}\,\Delta t && (135)\\ \vec{p}(t_2) &= \vec{p}(t_1) + \vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (136) \end{aligned}$$

La quantità "$\vec{F}\,\Delta t$", per $\vec{F}$ costante in $\Delta t$, è chiamata **impulso della forza**: $\rightarrow$ causa una variazione di quantità di moto.
Ne segue, per la velocità

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= \frac{1}{m}\vec{F}\,\Delta t && (137)\\ \vec{v}(t_2) &= \vec{v}(t_1) + \frac{1}{m}\vec{F}\times(t_2 - t_1) \quad (F \text{ costante})\,. && (138) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un modo semplice per ricavarsi la quantità di moto (e quindi la velocità del proiettile).

Se invece la forza non è costante, è sufficiente sommare, in analogia a quanto visto per le variazioni di posizione e di velocità, gli impulsi in piccoli intervalli di tempo.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}\,\big|_{t_1}^{t_2} &= \sum_i \Delta\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i\,\Delta t_i && (139)\\ &\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. && (140) \end{aligned}$$

Questa espressione definisce l'impulso di una forza anche per forze variabili con il tempo. Quindi, in generale:

$$\Delta\vec{p}\,|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{141}$$

(variazione quantità di moto $\leftrightarrow$ impulso della forza).

## 9.6

Vediamo ora più in generale la variazione di quantità di moto di due corpi interagenti.
Principio di azione e reazione (terzo principio della meccanica): forze uguali e contrarie:

$$\vec{F}_A^{(B)} \;=\; -\vec{F}_B^{(A)}\,, \tag{142}$$

ove $\vec{F}_A^{(B)}$ sta per "forza su $A$ dovuta a $B$", e analogo per $\vec{F}_B^{(A)}$. Analizziamo le variazioni di quantità di moto di $A$ e $B$:

$$\Delta\vec{p}_A^{\,(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A^{\,(B)}(t)\mathrm{d}t \tag{143}$$

$$\;=\; -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B^{\,(A)}(t)\mathrm{d}t \tag{144}$$

$$\;=\; -\,\Delta\vec{p}_B^{\,(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{145}$$

ovvero

$$\Delta\vec{p}_A^{\,(B)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Delta\vec{p}_B^{\,(A)}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0\,. \tag{146}$$

In una interazione fra due corpi la quantità di moto viene scambiata da un corpo all'altro. Se il sistema fisico è formato soltanto da due corpi (ovvero essi non hanno, almeno approssimativamente, interazioni con il resto del mondo), la loro *quantità di moto totale si conserva.*
Si noti come l'espressione di sopra sia in effetti vettoriale: la conservazione si applica alle tre componenti: se le interazioni con 'il resto del mondo' avviene soltanto in una o due delle componenti, la conservazione vale nelle rimanenti. Si noti inoltre come, per arrivare all'espressione di conservazione si è assunto che il principio di azione e reazione valga istante per istante.

Quantità di moto del cannoncino:

- posto su piano senza attrito, e coordinata $x$ orizzontale, positiva nella direzione di moto del proiettile:
  - lungo $x$ i due oggetti sono soggetti soltanto alla loro forza reciproca: $\rightarrow$ sistema isolato $\rightarrow$ $p_x$ si conserva (chiamiamolo semplicemente $p$). Essendo proiettile e cannone inizialmente fermi

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 0 && (147)\\ p_2 &= -p_1 && (148)\\ M\,v_2 &= -m\,v_1 && (149)\\ v_2 &= -\frac{m}{M}\,v_1 && (150) \end{aligned}$$

  - lungo la componente verticale la risultante delle forze è nulla: il moto di proiettile e cannoncino si mantiene sull'asse $x$.
- ancorato saldamente al terreno: in pratica il cannoncino è solidale con il terreno e quindi, con buona approssimazione, con la Terra (a meno che l'esplosione sia talmente potente da sollevare la piattaforma sulla quale il connoncino era ancorato...): in pratica si considera che cannoncino e Terra formino un solo corpo di massa 'infinita' rispetto al proiettile: $m/M \rightarrow 0$: il cannoncino non si sposta (ma il sistema cannoncino-Terra acquista la quantità di moto $-m\,v_1$: un oggetto di massa 'infinita' può variare la sua quantità di moto senza (apprezzabilmente) variare la sua velocità.
  Esempio di persona che saltella: la Terra varia continuamente la propria quantità di moto senza subire spostamenti.

Conservazione della quantità di moto: caso generale.
Se abbiamo un sistema isolato di oggetti, ovvero tali che essi interagiscono solo con gli altri oggetti di tale sistema, ma non con il resto del mondo, per ogni intervallo di tempo d$t$ possiamo estendere la (146) a tutte le coppie $ij$, ovvero

$$\mathrm{d}\vec{p}_i^{(j)} + \mathrm{d}\vec{p}_j^{(i)} = 0\,. \tag{151}$$

Ne risulta che, istante per istante, è nulla la variazione della quantità di moto totale del sistema $\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i,j} \mathrm{d}\vec{p}_i^{(j)}$.

Sistema isolato:

$$\begin{aligned} &\rightarrow\ \ \mathrm{d}\vec{p} = 0 && (152)\\ &\rightarrow\ \ \vec{p}(t) = \mathit{costante}. && (153)\\ & && (154) \end{aligned}$$

Altri esempi: persona inizialmente ferma su laghetto ghiacciato che riesce a muoversi lanciando un oggetto; razzo nel vuoto che accelera 'spruzzando' del gas ( o altro) ad alta velocità; Terra che 'assorbe' le variazioni di quantità di moto di quanti saltellano sulla terra.

## 9.7

Centro di massa del sistema (media pesata delle posizioni):

$$x_{CM}(t) = \frac{\sum_i m_i x_i(t)}{\sum_i m_i} \tag{155}$$

$$v_{x_{CM}}(t) = \frac{\mathrm{d}x_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{156}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \, \mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i v_{x_i}(t)}{\sum_i m_i} = \frac{p_{x_{tot}}(t)}{M_{tot}} \tag{157}$$

idem per $y$ e $z$

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\vec{p}_{tot}(t)}{M_{tot}}. \tag{158}$$

Sistema isolato: $\vec{p}_{tot}$ costante: $\rightarrow \vec{v}_{CM}$ costante.

Esempi: urto auto ($m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$) e camion ($m_1 = 10000\,\mathrm{kg}$), trascurando attriti ed assumendo rimangano attaccati: casi $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 0$ e velocità scambiate: $\rightarrow \Delta v$ per i due mezzi nei due casi (ma nota: le forze che subiscono le persone dipendono da accelerazioni, $\Delta v/\Delta t$: importanza di 'attutire' l'urto, ovvero aumentare $\Delta t$).

## 9.8

Sistema di punti materiali interagenti e soggetti a forze reciproche (**interne**) ed **esterne**:

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_i^{(ext)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i \,. \tag{159}$$

Sommando su tutti i punti materiali otteniamo

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{160}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sum_i \vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_i^{(j)} + \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \,, \tag{161}$$

ma, per il principio di azione-reazione, le forze interne si annullano a coppie nella sommatoria in quanto $F_i^{(j)} = -F_j^{(i)}$. La variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema è dovuta soltanto alle forze esterne:

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} && (162)\\
\vec{F}^{(ext)} &= \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} && (163)\\
&= M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}}{\mathrm{d}t} && (164)\\
&= M\,\vec{a}_{CM}\,, && (165)
\end{aligned}$$

ove $\vec{F}^{(ext)}$ è la *risultante* delle forze esterne e $M$ è la somma delle masse del sistema. È come se il $CM$ si comportasse come un punto materiale di massa $M$ (seconda legge della meccanica generalizzata ad un sistema di punti materiali).

Nel caso in cui le particelle formino un sistema isolato, ovvero $\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = 0$, la quantità di moto totale si conserva $\vec{P} = k$, ovvero $\sum_i \vec{p}_i = k$.

## 9.9

Definizione del **lavoro** in caso *unidimensionale* e per forza costante: $L = F\,\Delta s$ ("forza per spostamento"). Lavoro nel caso di forza che dipende dalla posizione: $L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta_{x_i}$ e limite ($n \to \infty$; $\Delta_{x_i} \to 0$):

$$L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (166)$$

Definizione dell'energia cinetica e connessione al lavoro mediante il cosiddetto teorema dell'energia cinetica (o delle 'forze vive'), consequenza di "$F = m\,a$":

$$\begin{aligned}
L|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x && (167)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t && (168)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} m\,v\,\mathrm{d}v && (169)\\
&= \frac{1}{2}\,m\,v^2\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(x_1) && (170)\\
&= E_c(x_2) - E_c(x_1)\,, && (171)
\end{aligned}$$

avendo definito $E_c = 1/2\, mv^2$ come **energia cinetica**:

$$\rightarrow \quad L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{172}$$

Unità di misura del lavoro e dell'energia: Joule = Newton×m, simbolo J. Ne segue: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$.

Lavoro in 3D: somma dei lavori delle componenti:

$$\mathrm{d}L \;=\; \mathrm{d}L^{(x)} + \mathrm{d}L^{(y)} + \mathrm{d}L^{(y)} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\,. \tag{173}$$

Quindi in generale,

$$L|_1^2 \;=\; \int_1^2 [F(x)\,\mathrm{d}x + F(y)\,\mathrm{d}y + F(z)\,\mathrm{d}z] \tag{174}$$

$$\;=\; \int_1^2 \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{175}$$

avendo riscritto, nell'ultima equazione la somma dei tre contributi al lavoro come un 'prodotto scalare' (segue alla prossima lezione).
Comunque, applicando alle altre due componenti quanto visto per $x$, e ricordandoci che $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, otteniamo che, in generale,

$$L|_1^2 \;=\; \Delta\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2\right) \tag{176}$$

$$\;=\; \Delta E_c|_1^2\,. \tag{177}$$

## 9.10 Problemi

1. Una forza varia nel tempo secondo la seguente espressione: $F(t) = \alpha + \beta/(1+t)$, con $\alpha = 2\,\mathrm{N}$ e $\beta = 3\,\mathrm{N\,s}$. Sapendo che essa agisce per un secondo (dall'istante $t = 0$) su un corpo di massa 10 g inizialmente a riposo, calcolare la velocità finale del corpo.

2. Un oggetto di 100 g, che viaggia inizialmente ad una velocità di 10 m/s è soggetto per 5 secondi ad una forza costante lungo la direzione del moto. Dopo i 5 secondi il corpo ha una velocità di -0.2 m/s. Calcolare il valore della forza.

3. Un cannoncino spara un proiettile di 20 g a 600 km/h e rincula a 10 m/s. Calcolare la massa del cannoncino.

4. Trovare il centro di massa di tre particelle poste lungo l'asse $x$: $x_1 = -1\,\mathrm{cm}$, $m_1 = 100\,\mathrm{g}$; $x_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $m_2 = 50\,\mathrm{g}$; $x_3 = 10\,\mathrm{cm}$, $m_3 = 10\,\mathrm{g}$.

5. Un'auto di $1000\,\mathrm{kg}$ viaggia a $80\,\mathrm{km/h}$ verso un furgone, di 8 tonnellate, fermo in un tratto di strada ghiacciata (ovvero ignoriamo gli attriti). Calcolare la velocità del centro di massa auto-furgone.
   L'auto non frena e urta il furgone. Dopo l'urto auto e forgone rimangono attaccati e scivolano sul ghiaccio senza attrito. Calcolare la variazione di velocità (prima/dopo l'urto) dell'auto e del furgone.

6. Risolvere il problema precedente nel caso di furgone a 80 km/h e auto ferma.

7. Una forza costante di $100\,N$ agisce per 2 metri, con verso concorde allo spostamento, su una particella di $100\,\mathrm{g}$. Calcolare la variazione di velocità della particella.

8. Sia data la seguente forza, il cui valore dipende dalla posizione, nel seguente modo: $\vec{F}(\vec{s}) = \{-1\,\mathrm{N},\ y\mathrm{N/m},\ 1/z\mathrm{N\,m}\}$. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza su un corpo che si sposta dalla posizione $\vec{s}_1 = \{0\,\mathrm{m},\ 1\mathrm{m},\ 10\mathrm{m}\}$ a $\vec{s}_2 = \{-3\,\mathrm{m},\ 2\mathrm{m},\ 100\mathrm{m}\}$.
   Calcolare inoltre la variazione del valore assoluto della velocità del corpo, sapendo che esso ha una massa di $0.5\,\mathrm{kg}$.

9. Una particella di $2\,\mathrm{kg}$ ha una energia cinetica di 100 Joule. Sapendo che le componenti della velocità nel piano $xy$ valgono $v_x = 5\,\mathrm{m/s}$ e $v_y = -2\,\mathrm{m/s}$, trovare il modulo della componente della velocità lungo $z$.

# 10 Venerdi 30/3, 16:00–18:00

## 10.1

Ancora su principio di azione-reazione e conservazione della quantità di moto. Importanza pratica nei problemi di spinta/trazione: quando camminiamo spingiamo la Terra e siamo spinti in avanti; aerei ad elica e a jet. Possibilità di cambiare stato di moto in condizioni di mancanza di attrito: caso classico di persona su ghiaccio.

## 10.2

Ancora su lavoro e variazione di energia cinetica.
Unità di misura di lavoro ed energia: Joule (J): 1 Joule = 1 N × 1 m; J ↔ kg m$^2$ s$^{-2}$.
**Esempio 1**: lavoro della forza di richiamo dell'oscillatore armonico:

- dalla posizione di equilibrio ($x = 0$) alla generica posizione $x$:

$$L|_0^x = \int_0^x F(x')\,\mathrm{d}x' = \int_0^x (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \tag{178}$$

$$= -\frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{179}$$

  → lavoro negativo (indipendentemente dal segno di $x$ — quello che conta è che forza e spostamento siano discordi): $\Delta E_c < 0$: velocità diminuisce:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(x) = \frac{1}{2}m\,v^2(0) - \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \tag{180}$$

- dalla generica posizione $x$ alla posizione di equilibrio ($x = 0$):

$$L|_x^0 = \int_x^0 (-k\,x')\,\mathrm{d}x' \tag{181}$$

$$= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{182}$$

  → lavoro positivo (indipendentemente dal segno di $x$ — quello che conta è che forza e spostamento siano concordi): $\Delta E_c < 0$: velocità aumenta:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(0) = \frac{1}{2}m\,v^2(x) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,; \tag{183}$$

- in particolare, dalla posizione iniziale $x_M$, nella quale la massa $m$ ha velocità nulla, fino a $x = 0$:

$$\frac{1}{2}m\,v^2(0) = \frac{1}{2}\,k\,x_M^2 \tag{184}$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega^2\,m\,x_M^2 \tag{185}$$

$$v(0) = \omega\,x_M\,, \tag{186}$$

  [ritroviamo lo stesso risultato trovato dalla cinematica, ovvero da $x(t) = x_M\,\cos(\omega\,t)$].

Si noti inoltre come la somma del lavoro per andare da 0 a $x$ e di quello per andare da $x$ a 0 sia nulla: $L|_0^x + L|_x^0 = 0$.

**Esempio 2**: lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, ovvero '$-mg$', con $g$ approssimativamente costante, da una quota iniziale $z_1$ ad una quota finale $z_2$

$$\begin{aligned} L|_{z_1}^{z_2} &= \int_{z_1}^{z_2} (-m\,g)\,\mathrm{d}z & (187) \\ &= -m\,g\,(z_2 - z_1) & (188) \end{aligned}$$

Se $z_2 > z_1$ (il corpo è salito): $L = -m\,g\,h < 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c < 0$.
Se $z_2 < z_1$ (il corpo è disceso): $L = m\,g\,h > 0 \;\rightarrow\; \Delta E_c > 0$.
($h$, definito positivo, è la differenza di quota dal punto più alto al punto più basso.) Anche in questo caso, se il corpo ritorna nella posizione iniziale il lavoro totale è nullo.

**Esempio 3**: lavoro della forza di attrito mentre il corpo si sposta da $x_1$ a $x_2 > x_1$ (indicando con $d$ la distanza fra i due punti):

$$\begin{aligned} L|_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (-\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x & (189) \\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1) = -\mu_D\,F_N\,d & (190) \\ ( &= -\mu_D\,m\,g\,d\ ,\ \text{caso particolare}\ ). & (191) \end{aligned}$$

Se invertiamo il verso del moto anche la forza cambia segno ($F = -\mu_D\,F_N\,\hat{v}$):

$$\begin{aligned} L|_{x_2}^{x_1} &= \int_{x_2}^{x_1} (\mu_D\,F_N)\,\mathrm{d}x & (192) \\ &= \mu_D\,F_N\,(x_1 - x_2) & (193) \\ &= -\mu_D\,F_N\,(x_2 - x_1)\ : & (194) \end{aligned}$$

Lavoro sempre negativo: $L|_{x_1}^{x_2} = -\mu_D\,F_N\,d$ se si va da $x_1$ a $x_2$ e poi si ritorna a $x_1$ si sommano i lavori negativi: $\rightarrow L_{tot} = -2,\mu_D\,F_N\,d$.

$\rightarrow$ Discussione sui vantaggi di usare il lavoro invece di risolvere in dettaglio le equazioni del moto.

## 10.3

In alcuni tipi di forze (molla, gravità, elettrostatica) il lavoro compiuto su un ciclo è nullo. Inoltre, in questi casi si osserva come l'energia cinetica 'sparisca' e poi 'ricompaia' (esempio: lancio di oggetto verso l'alto) in virtù della relazione $L|_{x_1}^{x_2} = \Delta E_c|_{x_1}^{x_2}$. Si ipotizza quindi, per questo tipo di forze, che quando l'energia cinetica 'sparice' (o semplicemente diminuice), essa si trasformi in un altro tipo di energia *meccanica*: **energia potenziale**:

diminuzione di energia cinetica → aumento di energia potenziale

(e viceversa)

$$\Delta E_c|_{x_1}^{x_2} = -\,\Delta E_p|_{x_1}^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p|_{x_1}^{x_2} = -\,L|_{x_1}^{x_2}\,. \tag{195}$$

La (195) definisce (a meno di una costante) l'energia potenziale. Nota: sia per l'energia cinetica che per l'energia potenziale il lavoro fornisce la variazione dell'energia, ma, mentre per l'energia cinetica esiste uno 'zero naturale', corrispondente ad una velocità nulla, nell'energia potenziale tale 'zero naturale' non sempre esiste. In genere, dato un problema è conveniente fissare lo zero dell'energia potenziale in posizione del suo minimo (in quel problema).
**Esempio 1** (molla)

$$\Delta E_p|_0^x \;=\; -\,L|_0^x = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \tag{196}$$

$$E_p(x=0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,. \tag{197}$$

**Esempio 2** (forza di gravità "-mg"). Se il moto dell'oggetto si svolge da un livello minimo (es. tavolo, pavimento, piano stradale, etc.), conviene prendere tale livello come riferimento per lo zero dell'energia potenziale:

$$\Delta E_p|_0^h \;=\; -\,L|_0^h = m\,g\,h \tag{198}$$

$$E_p(h=0)=0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(h) = m\,g\,h\,. \tag{199}$$

## 10.4

**Prodotto scalare**: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\theta$ ("prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo fra essi compreso").
Può essere visto come prodotto modulo per proiezione: $a\cdot(b\cos\alpha)$, ovvero $b\cdot(a\cos\alpha)$. Commuta, ovvero $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Prodotto scalare di un vettore con se stesso: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$. Vettori ortogonali: prodotto scalare nullo. Applicazione ai 'versori' [$\hat{\imath} = (1,\,0,\,0)$, $\hat{\jmath} = (0,\,1,\,0)$,$\hat{k} = (0,\,0,\,1)$]: $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$; $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$,

etc.. Proprietà distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
Dalla definizione e dalle proprietà segue:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \,, \tag{200}$$

mediante la quale è possibile calcolarsi il prodotto scalare dalle componenti. Dalla definizione di prodotto scalare e dalla sua valutazione dalle componenti segue

$$a\, b\, \cos\theta = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \,, \tag{201}$$

da cui è possibile calcolarsi $\theta$ note le componenti dei vettori.

Tornando al lavoro, si riconosce quindi in $F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$ il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$. Quindi, in generale

$$L|_1^2 \;=\; \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{202}$$

Con le seguenti *semplificazioni*:

- <u>forza costante</u>

$$L|_{\Delta s} \;=\; \vec{F} \cdot \Delta s \,; \tag{203}$$

- <u>moto 1D</u> (es lungo '$x$'):

$$L|_{x_1}^{x_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx \,; \tag{204}$$

- <u>moto 1D</u> (es lungo '$x$') e <u>forza costante</u>:

$$L|_{\Delta x} \;=\; F_x\, \Delta x \,. \tag{205}$$

## 10.5

Lavoro eseguito dalle diverse forze che agiscono su uno stesso punto materiale. Se $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, ne segue

$$\mathrm{d}L \;=\; \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = (\sum_i \vec{F}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{206}$$

$$\;=\; \sum_i \mathrm{d}L_i \;: \tag{207}$$

il lavoro totale è pari alla seoma del lavoro effettuato dalle varie componenti. Esempio: in un piano inclinato con attrito, possiamo parlare di lavoro effettuato dalla forza peso e quello effettuato dalla forza di attrito. La somma dei due contributi dà il lavoro totale.

## 10.6

Lavoro positivo, negativo o nullo, a seconda dell'angolo formato fra forza e spostamento elementare, e quindi fra forza e velocità, ovvero fra accelerazione e velocità. Caso particolare

$$\begin{aligned} L = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{s} && (208)\\ &\Rightarrow \quad \vec{F} \perp \vec{v} && (209)\\ &\Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{v}\,. && (210) \end{aligned}$$

Caso del moto circolare, per ogni d$t$:

- Forza (centripeta) radiale, mentre $ds = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ tangenziale: $\alpha = \pi/2 \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow L = 0$;
- In dettaglio:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L(t) &= F_x v_x \mathrm{d}t + F_y v_y \mathrm{d}t && (211)\\ &= [(-m\omega^2 R\cos\omega t)\cdot(-\omega R\sin\omega t) \\ &\quad +(-m\omega^2 R\sin\omega t)\cdot(\omega R\cos\omega t)]\,\mathrm{d}t = 0\,. && (212) \end{aligned}$$

Questo è il motivo per cui nel moto circolare uniforme la velocità si mantiene costante pur essendoci una forza: istante per istante il lavoro totale è nulla in quanto un contributo di un segno dovuto ad una componente è compensato da un contributo di segno opposto dovuto all'altra componente.

Altro caso importante: reazioni vincolari normali alla velocità (ad esempio guide, binari, etc.): la forza del vincolo è, punto per punto, sempre ortogonale al vettore velocità: il vettore $\vec{v}$ cambia direzione e verso, ma non il modulo.

## 10.7

Riepilogo su lavoro e bilancio energia potenziale e potenziale:

- Tutte le forze $\rightarrow$ $L_{tot}|_A^B = \Delta E_c|_A^B$, ove il pedice *tot* indica che si tratta del lavoro fatto dalla risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo, conservative o non.

- Forze conservative $\rightarrow$ $L_{F^{(i)}_{cons}}\Big|_A^B = -\,\Delta E_p^{(i)}\Big|_A^B$, ove l'indice $i$ indica che la relazione è valida per ciascuna delle forze conservative in gioco

- Se sono presenti solo forze conservative: si conserva l'energia meccanica totale: $E_c + E_p = costante$:

$$E_c(in) + E_p(in) \quad = \quad E_c(fin) + E_p(fin)\,, \tag{213}$$

  in quanto $E_c(fin) - E_c(in) = -[E_p(fin) - E_p(in)]$, ovvero $\Delta E_c = -\Delta E_p$.

## 10.8

**Problemi** (quando è possibile fare uso di lavoro, energia cinetica, impulso e quantità di moto: evitando pura cinematica):

1. corpo cade da 10 m: $\rightarrow$ velocità finale;

2. corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$: a che altezza arriva?

3. corpo lanciato verso l'alto con $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$: velocità quando è salito di 10 dalla posizione iniziale.

4. Un corpo si massa 100 g, sospeso ad una molla, compie oscillazioni di ampiezza 2 cm con un periodo di 0.1 s. Calcolare la velocità massima del corpo durante le oscillazioni.

5. Un corpo è frenato dalla sola forza di attrito dinamico che agisce fra esso e un piano orizzontale. Sapendo che inizialmente aveva una velocità di 10 m/s e che è frenato in 5 m si determini il coefficiente di attrito.

6. Calcolare il lavoro effettuato dalla forza elastica di una molla in un periodo completo in un periodo completo.

7. Un corpo di massa 100 g scende lungo un piano inclinato di $\alpha = 20\,^o$. Sapendo che il coeffciente di attrito dinamico corpo-piano vale $\mu_d = 0.1$ e che lo spazio percorso lungo il piano vale 2 m, determinare:

(a) lavoro effettuato dalla forza peso;
(b) lavoro effettuato dalla forza di attrito;
(c) lavoro totale;
(d) velocità finale, sapendo che esso era inizialmente fermo.

8. Su un corpo si massa 1 kg agisce una forza di intensità variabile con la posizione secondo la legge $F(x) = \alpha + \beta x^2$, con $\alpha = -5\,\mathrm{N}$ e $\beta = 2\,\mathrm{N/m}$. Calcolare il lavoro della forza nel tratto da $x = 1\,m$ a $x = 3\,\mathrm{m}$.

9. Su una barretta di peso trascurabile e lunghezza 1 m sono fissate due pesetti agli estremi e uno al centro. Quello al centro ha massa 1 kg e quelli agli estremi 2 kg e 3 kg. Trovare il centro di massa del sistema. (Per fare i conti, si immagini la barretta lungo l'asse $x$, con la massa di 2 kg in $x = 0$, etc.)

10. Un oggetto di massa 5 kg viaggia a 20 m/s verso un altro oggetto di massa 1 kg inizialmente (il moto si svolge su un piano orizzontale privo di attrito).
    (a) Determinare la velocità del centro di massa e la quantità di moto totale del sistema.
    (b) Sapendo che dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati, determinare la loro velocità finale.

11. Seguito del problema precedente. Successivamente essi salgono su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo di $10^o$ rispetto al piano orizzontale:
    (a) Determinare il lavoro effettuato dalla (componente lungo il piano inclinato della) forza peso fino al momento in cui il sistema si arresta.
    (b) Determinare lo spazio percorso lungo il piano inclinato fino all'arresto.
    (c) Determinare a che altezza arrivano rispetto al piano orizzontale.

    [Per risolvere il problema fare uso dei concetti di lavoro ed energia cinetica. Niente dettagli cinematici e niente energia potenziale (per chi la conosce già).]

12. Idem del problema precedente, ma con piano scabro e coefficiente di attrito dinamico di $\mu_d = 0.2$.

13. Ancora sull'ultimissimo problema. Dopo che il sistema si è fermato riscende: calcolare velocità quando torna sul piano orizzontale. [Sempre usando solo lavoro ed energia cinetica.]

14. Risolvere il problema nr. 1 usando energia cinetica e potenziale.

15. Risolvere il problema nr. 2 usando energia cinetica e potenziale.

16. Risolvere il problema nr. 3 usando energia cinetica e potenziale.

17. Risolvere il problema nr. 4 usando energia cinetica e potenziale.

18. Date le due forze, espresse in N, $F_1 = \{1, -3, 5\}$ e $F_2 = \{2, 1, -1\}$, trovare: l'angolo fra di esse; la risultante; l'angolo di ciascuna di esse rispetto alla risultante.

19. Le componenti di due vettori (nel piano $xy$) sono $(1, 3)$ e $(5, -1)$: trovare l'angolo fra i due vettori.

20. Un corpo si sposta dalla posizione lungo l'asse $x$ dal punto $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ a $x_2 = 2\,\mathrm{m}$ (ovvero le altre coordinate rimangono invariate). Sapendo che in tale tratto il corpo è soggetto alla forza costante $\vec{F} = (-2,\, 4,\, -5)\,\mathrm{N}$, determinare il lavoro compiuto da tale forza.

21. Sul problema precedente: dire se il corpo è soggetto anche ad altre forze.

22. Un corpo si sposta nel piano $xy$ da $\vec{r}_1 = (1,\, 2)\,\mathrm{m}$ a $\vec{r}_2 = (3,\, -1)\,\mathrm{m}$. Agisce la forza di intensità dipendente dalla posizione $\vec{F} = (1/x,\, 2\,y)\,\mathrm{N}$, calcolare il lavoro compiuto dalla forza.

23. Un oggetto scivola (senza ruotare!) lungo un piano inclinato con privo di attrito e, arrivato sul piano orizzontale, raggiunge la velocità di $10\,\mathrm{m/s}$. Calcolare la quota dalla quale l'oggetto era partito.

24. Sull'esercizio precedente: sapendo che il coefficiente di attrito del piano orizzontale vale 0.3 calcolare lo spazio percorso dall'oggetto prima di arrestarsi.

# 11 Lunedi 2/3, 16:00–18:00

## 11.1

Breve riepilogo del corso, in particolare quantità di moto, lavoro, energia cinetica ed energia potenziale. $dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (\vec{F} \cdot \vec{v})\, dt$: positivo, negativo e nullo a seconda che $\vec{F}$ $d\vec{v}$ formino angolo acuto, ottuso o retto.

## 11.2

Potenziale dovuto alla forza di gravità: caso generale 3-D: il lavoro non dipende dal percorso: $\rightarrow$ la variazione di energia potenziale dipende solo dalla quota iniziale e finale e non dal percorso effettuato.

### 11.2.1

Esempio da fare da soli: piano inclinato (schematizzato da triangolo $ABC$, con $\overline{AB} = h$, altezza; $\overline{AC} = d$, percorso lungo piano inclinato; $\overline{BC} = b$, base):

i) $A \rightarrow B + A \rightarrow B$: $\Rightarrow mgh + 0 = mgh$;

ii) $A \rightarrow C$ considerando componente forza di gravità lungo $AC$: $\Rightarrow mg \sin(\alpha)\, d$, ovvero $mgh$, in quanto $d = h/\sin\alpha$;

iii) $A \rightarrow C$ considerando $\vec{F} \cdot \Delta\,\vec{s} = F\, d\, \cos\theta$, con $\theta = \pi/2 - \alpha$, ovvero $\cos\theta = \sin\alpha$: $\Rightarrow$ ancora $mgh$.

Caso generale: traiettoria a zigzag o curva qualsiasi dalla quota $z_1$ alla quota $z_2$: conta la proiezione lungo la verticale: lavoro non dipende dal percorso effettuato ma sono dalla quota. Se si fa un percorso chiuso, tornando allo stesso punto di partenza, il lavoro totale è nullo. Queste proprietà possono essere prese come definizione di una forza conservativa.

### 11.2.2

Problemi tipici: piani inclinati e guide inclinate in modo anche variabile. A volte viene data la forma funzionale della guida [es. $z(x) = \alpha x^2$, oppure $z(x) = A\, e^{-\alpha\, x}$] e si danno i valori della $x$: $\Rightarrow$ ricavarsi i corrispondenti della $z$ e quindi il dislivello.

## 11.3

Ruolo delle reazioni vincolari nei problemi con 'scivoli' senza attrito: le reazioni sono normali alla traiettoria e quindi non fanno lavoro e non contribuiscono al bilancio energetico (qualsiasi componente longitudinale, corrisponde ad una forza di attrito, la quale compie lavoro negativo e quindi consuma energia meccanica: dire che le reazioni vincolari sono normali allo spostamento e dire che la superficie di scorrimento è priva di attrito e è quindi la stessa cosa).

## 11.4

Guida circolare disposta verticalmente: che velocità deve avere l'oggetto nel punto più alto per rimanere 'attaccato' sulla guida e non cadere ('cerchio della morte') Considerazioni cinematiche e dinamiche quando l'oggetto è *nel punto più in alto* della guida:

- Velocità assume un minimo e si può ritenere costante in un piccolissimo intervallo di tempo: approssimazione moto circolare uniforme OK;
- Dalla cinematica sappiamo che $F_c = m\,\omega^2\,R = v^2/R$.
- Bilancio delle forze:
  - Il corpo è sicuramente soggetto alla forza peso, $F = -mg$.
  - In ogni punto della guida c'è anche una reazione vincolare $T$ che, punto per punto, fa curvare il corpo (se capisce facilmente che se un tratto della guida viene forato, o sostituito con della carta velina, quando il corpo arriva in quel punto esce fuori). Questa forza è sempre *normale alla superficie della guida* (qualsiasi componente tangenziale, dovuto ad esempio ad attriti, rallenterebbe il corpo! Le accelerazioni normali al vettore velocità sono le sole che non cambiano velocità: → vedi moto circolare uniforme). Quindi $T$, in ciascun punto della guida circolare è diretta come la forza centripeta.
  - Inoltre il corpo è soggetto alla forza peso, che nel punto più in alto è diretta come $T$, ovvero nel punto più in alto la forza centripeta è pari alla somma di $T$ e $mg$:

$$m\,\frac{v^2}{R} = mg + T \qquad (214)$$

$$T = m\,\frac{v^2}{R} - mg \qquad (215)$$

La condizione di contatto nel punto più in alto è che ci sia una pur piccola reazione vincolare, ovvero $T > 0$, da cui

$$
\begin{aligned}
m\,\frac{v^2}{R} - mg &> 0 && (216)\\
\frac{v^2}{R} - g &> 0 && (217)\\
v &> \sqrt{R\,g} && (218)
\end{aligned}
$$

### 11.4.1 Variazioni sul tema

1. Oggetto lasciato scivolare, da fermo, lungo una guida: da quale quota deve partire per avere la velocità minima per compiere il giro della morte? Bilancio energia potenziale e cinetica iniziali e finali, sapendo inoltre che l'energia cinetica deve valere almeno $mv^2/2$, con $v$ calcolato precedentemente (R. $h > 5/2\,R$).

2. Partenza da piano orizzontale: corpo 'sparato da molla di costante $k$. Quanto bisogna contrarre la molla? (R. $\Delta x = \sqrt{5mgR/k}$)

3. Variante su quest'ultima variazione: prima di arrivare alla guida verticale percorre una distanza $d$ su piano orizzontale con attrito dinamico $\mu_d$. Quanto bisogna contrarre la molla? Ragionamento a step: 1) energia potenziale della molla; 2) energia cinetica del corpo quan do lascia la molla; 3) energia cinetica alla base della guida, diminuita, rispetto a quella iniziale, del lavoro fatto dalla forza di attrito; 4) Energia cinetica ed energia potenziale nel punto più alto.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,k\,x^2 - \mu_d\,m\,g\,d &= m\,g\,(2R) + \frac{1}{2}\,m\,v^2 && (219)\\
&\geq m\,g\,(2R) + \frac{1}{2}\,m\,g\,R && (220)
\end{aligned}
$$

Un modo alternativo per ottenere lo stesso risultato è di calcolare il lavoro totale svolto dalle diverse forze in gioco ed eguagliarlo alla variazione di energia cinetica:

$$
\begin{aligned}
L(\text{molla})|_x^0 + L(\text{attrito})|_0^d + L(\text{gravità})|_{h=0}^{h=2R} &= \Delta E_c && (221)\\
\frac{1}{2}\,k\,x^2 - \mu_d\,m\,g\,d - m\,g\,(2R) &= \frac{1}{2}\,m\,v^2 - 0 && (222)
\end{aligned}
$$

### 11.5

Trasformazione galileiana delle velocità, con esempi del tapis roulant e del nuotatore sul fiume, etc.
Sia $P$ un punto che si muove nel sistema di riferimento $S$ con origine di coordinate in $O$, mentre il sistema di riferimento $S$ è in moto *rettilineo uniforme* rispetto ad altro sistema di riferimento $S'$ con origine $O'$. Il problema è, date $\vec{v}_O(P)$ e $\vec{v}_{O'}(0)$ di trovare $\vec{v}_{O^{prime}}(P)$. Chiamando i raggi vettore $\vec{r}_O(P)$ e $\vec{r}_{O'}(O)$, abbiamo, istante per istante,

$$\vec{r}_{O'}(P) \;=\; \vec{r}_{O'}(O) + \vec{r}_O(P)\,. \tag{223}$$

In un intervallo di tempo infinitesimo $\mathrm{d}t$ si hanno, per effetto delle velocità, le seguenti variazioni infinitesime:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r}_O(P) &= \vec{v}_O(P)\,\mathrm{d}t && (224)\\
\mathrm{d}\vec{r}_{O'}(O) &= \vec{v}_{O'}(O)\,\mathrm{d}t && (225)\\
\mathrm{d}\vec{r}_{O'}(P) &= \mathrm{d}\vec{r}_O(P) + \mathrm{d}\vec{r}_{O'}(O) = \vec{v}_O(P)\,\mathrm{d}t + \vec{v}_{O'}(O)\,\mathrm{d}t\,, && (226)
\end{aligned}$$

da cui, ricordando che $O$ si muove in modo rettilineo uniforme rispetto ad $O'$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{O'}(P) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{O'}(P)}{\mathrm{d}t} &= \vec{v}_O(P) + \vec{v}_{O'}(0) && (227)\\
\vec{a}_{O'}(P) \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{O'}(P)}{\mathrm{d}t^2} &= \vec{a}_O(P)\,. && (228)
\end{aligned}$$

Sistemi che si muovono di moto relativo rettilineo uniforme (e in moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse) sono chiamati *sistemi di riferimento inerziali.* In questi sistemi: $\rightarrow$ stesse accelerazioni e quindi stesse forze.

[**(parentesi fuori programma)** Somma delle velocità: va in crisi quando la somma è confrontabile (o addirittura supera) la velocità della luce, costante e uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tale formula di trasformazione (galileiana) non va pĭbene e va sostituita con le *trasformazioni di Lorentz* (relatività ristretta). Comunque, tanto per capire, dov'era il punto debole della dimostrazione di sopra? $\rightarrow$ aver assunto i $\mathrm{d}t$ uguali nei due sistemi di riferimento, ovvero aver ipotizzato un tempo assoluto che scorre nello stesso modo sia nel sistema di riferimento in cui l'osservatore è a riposo che in tutti gli altri sistemi di riferimento.
Breve discussione qualitativa sul problema della sincronizzazione degli orologi —

si pensi ad una sincronizzazione precisa degli orologi dei computer medianti *time server*.]

Caso tipico: nuotatore sul fiume:

$$\vec{v}_{nR} \;=\; \vec{v}_{nF} + \vec{v}_{FR}\,, \tag{229}$$

ove $\vec{v}_{FR}$ è la velocità del fiume rispetto alla riva, $\vec{v}_{nF}$ la velocità del nuotatore rispetto al fiume e $\vec{v}_{nR}$ la velocità del nuotatore rispetto alla riva. Scegliendo opportunamente gli assi abbiamo $\vec{v}_{FR} = (v_F, 0)$, $\vec{v}_{nF} = (v_L, v_T)$ (ove $v_L$ e $v_T$ stanno per velocità longitudinale e trasversale rispetto alla corrente), per cui $\vec{v}_{nR} = (v_F + v_L, v_T)$. Casi elementari sono quando la velocità del nuotatore è solo lungo la corrente o trasversale ad essa.

**Attenzione** Le proprietà di trasformazione non implicano che ci debba essere un trascinamento (anche se in molti problemi pratici è così). è soltanto una questione di descrizione del moto in diversi sistemi di riferimenti: se sto sull'aereo A con velocità $\vec{v}_A$ rispetto al terreno e vedo l'aereo B, che va a $\vec{v}_B$ rispetto al terreno, posso calcolare $\vec{v}_A(B)$. Ma se B vede un terzo aereo C andare a $\vec{v}_B(C)$, mi posso calcolare $\vec{v}_A(C)$.

Dissussioni su moti relativi, ed in particolare riguardanti voili transatlantici.

## 11.6

Introduzione ai **problemi di urto**:
Concetto di urto elastico, con esperimenti su palline: velocità iniziale ($E_c$ iniziale); contrazione del corpo elastico (quelli che sembrano indeformabili, ad es. palline di acciaio, sono corpi elastici con $k \to \infty$; decontrazione e resituzione dell'energia cinetica. Il caso ideale è quando l'energia cinetica viene restituita completamente. Normalmente una parte dell'energia viene persa per vibrazioni.

Schemi di urto di due oggetti in approssimazione di sistema isolato:

**Sempre** Si conserva quantità di moto:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \;=\; m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \tag{230}$$

**Urti perfettamente elastici** Si conserva anche energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{231}$$

**Urti anelastici** parte dell'energia 'meccanica' (cinetica) è persa: $\rightarrow$ calore, 'etc.'. Nota: gli urti in cui i corpi rimangono attaccati appartengono a questa classe urti completamente anelastici: (*nel CM* energia cinetica sparisce): particolarmente semplici da trattare.

Esempio particolarmente semplice: urto (centrale) di due corpi aventi stessa massa, di cui uno in movimento e l'altro a riposo: Le quazioni di conservazione si riducono a

$$v_1 = v_1' + v_2' \tag{232}$$
$$v_1^2 = {v'}_1^2 + {v'}_2^2 , \tag{233}$$

la cui soluzione è $v_2' = v_1$ e $v_1' = 0$ (oltre a $v_1' = v_1$ e $v_2' = 0$, corrispondente al fatto che in realtà i corpi non si incontrano).

## 11.7

Urto elastico frontale (unidimensionale): trattazione generale.
Riprendiamo le leggi di conservazione (230)-(231) degli urti elastici, riscrivendole nel modo seguente:

$$m_1\, v_1 - m_1\, {v'}_1 = m_2\, {v'}_2 - m_2\, v_2 \tag{234}$$
$$m_1 v_1^2 - m_1 {v'}_1^2 = m_2 {v'}_2^2 - m_2 v_2^2 , \tag{235}$$

ovvero

$$m_1\, (v_1 - {v'}_1) = m_2\, ({v'}_2 - v_2) \tag{236}$$
$$m_1\, (v_1^2 - {v'}_1^2) = m_2\, ({v'}_2^2 - v_2^2) , \tag{237}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (la seconda diviso la prima) e ricordandosi che $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$, si ottiene

$$v_1 + {v'}_1 = v_2 + {v'}_2 , \tag{238}$$

ovvero

$$v_1 - v_2 = ({v'}_2 - {v'}_1) . \tag{239}$$

La (238) ci dice che in un urto elastico frontale la somma della velocità iniziale e finale di una particella è pari alla somma della velocità iniziale e finale dell'altra particella. Più interessante è la 'lettura' della (239): in un urto elastico la velocità relativa fra le due particelle viene invertita (ma resta costante in modulo).

Casi facili ottenuti applicando la (238) o la (239). Urto fra due corpi di cui uno dei due ha **massa 'infinita'** rispetto all'altro (parete, pavimento, mazza da golf, etc). un corpo di massa 'infinita' ha inerzia infinita e quindi non può cambiare velocità. Dalla (238) e avendo indicato con 2 il corpo di massa infinita ne segue:

$$v_1 + v_1' = 2\,v_2 \tag{240}$$

$$v_1' = 2\,v_2 - v_1 \tag{241}$$

1. Urto di pallina contro parete o pavimento (massa 'infinita'): $v_2 = 0$: $\Rightarrow$ $v_1' = -v_1$: la pallina rimbalza: velocità cambia segno ma rimane costante in modulo.

2. Urto di mazza da golf in movimento ($v_2$) contro pallina ferma ($v_1 = 0$), ovvero calcio sul palla ferma (con le suddette approssimazioni dei rapporti di massa — si ricordi che il piede è ancorato alla gamba, etc.): $\Rightarrow v_1' = v_2$: la palla parte con velocità doppia del corpo che l'ha colpita.

3. Urto di palla e mazza da golf che si vanno incontro (o colpo 'di rimpallo su pallone, ovvero racchettata su palla che viene dall'altroi campo): $v_1' = 2\,v_2 - v_1$: Ma se ci ricordiamo che $v_1$ e $v_2$ hanno segni opposti (si vanno incontro): $|v_1'| = |2\,v_2| + |v_1|$: il modulo della velocità del corpo leggero è pari a due volte il modulo della velocità del corpo pesante che l'ha colpito, più il modulo della sua velocità iniziale!

## 11.8 Problemi

1. Una guida, priva di attrito, ha un profilo parabolico $z = \alpha x^2$, con $\alpha = 1\,\mathrm{m}^{-1}$. Sapendo che un corpo viene rilasciato dalla coordinata $x = -1\,m$, calcolare la sua velocità quando arriva a $x = 0$.

2. Si immagini la stessa guida parabolica, ma questa volta con attrito. L'oggetto viene lasciato in $x = -2\,\mathrm{m}$ e arriva fino a $x = 1\,\mathrm{m}$, poi torna indietro. Calcolare il lavoro compiuto dalle forze di attrito.

3. Un oggetto di $10\,\mathrm{kg}$ percorre una guida circolare di raggio $3\,\mathrm{m}$ posizionata verticalmente. Sapendo che nel punto più alto la sua velocità è pari a $10\,\mathrm{m/s}$ calcolare quanto vale la reazione vincolare in quel punto.

4. Un'auto di 1000 kg viaggia a 100 km/h su un tratto di strada piano, con raggio di curvatura 400 m. Calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché ciò sia possibile.

5. Fare alcuni esempi numerici sui problemi svolti durante la lezione.

6. Un fiume, di larghezza $L$ scorre con velocità $v_F$. Un nuotatore nuota con velocità $v_T$ su un fiume in direzione trasversale a quella di scorrimento della corrente.

   (a) A che velocità si muove rispetto alla riva? (vettore e modulo)

   (b) Trovare l'angolo fra la direzione del moto del nuotatore e quella di scorrimento dell'acqua.

   (c) Quanto tempo impiegherà ad attraversare il fiume?

   (d) Per quanto viene trascinato a valle durante l'attraversamento?

7. Si immagini una gara di nuoto su un fiume, con le corsie, lunghe 50 m, disposte parallelamente al verso della corrente. Il fiume ha una velocità di 1 m/s. Calcolare il tempo che un centometrista farà sul fiume se nuota ad una velocità tale che in una piscina olimpionica ($2 \times 50\,\mathrm{m}$) avrebbe fatto 60 s netti.

8. Un'auto viaggia con velocità $v$ ed ha ruote di raggio $R$. Assumendo che (come succede effettivamente, a meno che l'auto non perda aderenza) il punto di contato della ruota con l'asfalto sia istante per istante fermo rispetto all'asfalto (ovvero non slitta), determinare la velocità angolare della ruota e la velocità, rispetto al suolo, del punto più alto della ruota.

9. (Pendolo 'balistico') Un proiettile di massa $m$ e velocità orizzontale $v$ colpisce un oggetto di massa $M$ inizialmente a riposo e sospesa ad un filo inestensibile e senza peso di lunghezza $l$. Il proiettile rimane attaccato al corpo e l'intero sistema comincia ad oscillare, portandosi nella prima oscillazione ad un angolo $\alpha$ rispetto alla normale. Determinare $\alpha$ conoscendo $m$, $M$, $l$ ed $v$.

10. Un proiettile di 50 g colpisce orizzontalmente un pendolo balistico avente una massa di 50 kg e rimane ad esso legato dopo l'urto. Sapendo che la massa si solleva di 11 cm, determinare la velocità del proiettile.

11. Due corpi aventi stessa massa e stessa velocità (ma ovviamente di verso opposto) si urtano frontalmente. Calcolare le velocità finali dei due corpi assumendo che l'urto sia perfettamente elastico.

12. Una pallina cade da 1 metro. Sapendo che nel rimbalzo sul pavimento viene perso il 20% dell'energia meccanica, si determini la velocità immediatamente dopo il rimbalzo e la quota alla quale ritorna.

13. Un oggetto di massa 1 kg urta con velocità 10 m/s un altro oggetto di massa 3 kg. Sapendo che i due corpi rimandono attaccati dopo l'urto e che il moto avviene su un piano, di coefficiente di attrito dinamico 0.2, calcolare la distanza che i due corpi percorrono dopo l'urto prima di arrestarsi.

14. Una pallina da tennis va viaggia a 72 km/h. Essa viene colpita frontalmente da una racchetta che si muove a 10 m/s. Calcolare la velocità finale della pallina.

# 12 Venerdi 13/4, 16:00–18:00

## 12.1

Esperimento del doppio cono che 'sale invece di scendere'.

## 12.2

Ancora su urti, soprattutto elastici e nel caso limite di $m_1/m_2 \to \infty$, con esperimenti in aula.

## 12.3

Esercitazione: discussione di vecchi problemi proposti (vedi questi appunti).

# 13 Lunedi 23/4, 16:00–18:00

## 13.1

Commenti su prova in itinere e visione compiti.

## 13.2

Ancora su urti elastici unidimensionali. Formule generali e sottocasi notevoli. Riprendendo la (235) e una delle (238) e (239) e risolvendo il sistema di equazioni lineari otteniamo

$$v'_1 = \frac{2\,m_2\,v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2} \tag{242}$$

$$v'_2 = \frac{2\,m_1\,v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2} \tag{243}$$

Casi particolari:

$\boxed{v_2 = -v_1}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - 3\,m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{244}$$

$$v'_2 = \frac{3\,m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{245}$$

Sottocaso interessante:

$\underline{m_1 = m_2}$:

$$v'_1 = -v_1 \tag{246}$$

$$v'_2 = v_1 \tag{247}$$

$\rightarrow$ entrambe rimbalzano all'indietro, invertendo il vettore velocità.

$\boxed{v_2 = 0}$:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{248}$$

$$v'_2 = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\,v_1 \tag{249}$$

Sottocasi interessanti:

$\underline{m_1 = m_2}$

$$v'_1 = 0 \tag{250}$$

$$v'_2 = v_1\ : \tag{251}$$

le particelle si scambiano il moto;

$\underline{m_1 \ll m_2}$ (ovvero urto contro un corpo di 'massa infinita')

$$\begin{aligned} v'_1 &= -v_1 & (252) \\ v'_2 &= 0 : & (253) \end{aligned}$$

la particella inizialmente in moto rimbalza; l'altra resta 'praticamente' in quiete (ma ha assorbito una quantità di moto pari a $2m_1v_1$!);

$\underline{m_1 \gg m_2}$ (esempio urto di palla grande contro 'pallino'):

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 & (254) \\ v'_2 &= 2\,v_1 : & (255) \end{aligned}$$

la palla pesante prosegue praticamente imperturbata, mentre la seconda 'schizza' in avanti con velocità doppia della palla che l'ha colpita.

$\boxed{v_1 = V_1,\, v_2 = -V_2,\, m_1 \gg m_2}$ con $V_1$ e $V_2$ definite positive. (Caso fisico: racchetta contro pallina che viaggia in senso opposto)

$$\begin{aligned} v'_1 &= V_1 & (256) \\ v'_2 &= 2\,V_1 + V_2 : & (257) \end{aligned}$$

la pallina rimbalza con una velocità pari alla sua velocità iniziale, aumentata del doppio della velocità della racchetta (ecco perché i tiri al volo contro palla che viene incontro sono particolarmente 'potenti').

Si noti come, in tutti questi casi, la (239) è rispettata. Essa ci permette noltre di ricavarsi la velocità finale senza fare conti. Prendiamo ad esempio l'ultimo caso. La differenza di velocità fra racchetta e palla vale $V_1 - (-V_2) = V_1 + V_2$ e tale sarà la differenza fra la velocità finale della palla e quella della racchetta. Ma, nell'approssimazione di massa infinita della racchetta la velocità di quest'ultima non viene modificata dall'urto (si pensi al caso limite auto-moscerino). Quindi la velocità finale della palla vale $V_1 + (V_1 + V_2) = 2V_1 + V_2$.

Urti parzialmente anelastici: una parte dell'energia meccanica viene persa. Esempio: rimbalzi di pallini normali. Misura (indiretta) della frazione di energia persa dalla misura delle quote successive ad ogni rimbalzo (nota: l'inelasticità può dipendere anche dalla velocità di impatto e, quindi, dalla quota iniziale). Nell'urto perfettamente anelastico si annulla l'energia cinetica *nel* centro di massa (ma rimane quella *del* centro di massa!).

Note su conservazione di quantità di moto e 'assorbimento' di quantià di moto da parte di una parete di massa 'infinita' nel caso di urti eleastici e anelastici.

## 13.3

Urto elastico fra punti materiali (o urto centrale fra sfere) aventi stessa massa e velocità opposta. Soluzione con argomenti di simmetria: $\rightarrow$ rimbalzo: le velocità si invertono. Caso di pari massa, ma velocità diverse: analisi nel cenro di massa: $\rightarrow$ trasformazioni di velocità.
Trasformazione della velocità del punto materiale di massa $m$ da $CM \rightarrow LAB$ e viceversa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{LAB}(m) &= \vec{v}_{LAB}(CM) + \vec{v}_{CM}(m) &(258)\\ \vec{v} &= \vec{v}_{CM} + \hat{\vec{v}} &(259) \end{aligned}$$

con trasformazione inversa $\hat{\vec{v}} = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$, ove, in questo esempio, il simbolo $\hat{\vec{v}}$ indica la velocità nel CM (e non il versore!).
Urto elastico di oggetti di pari massa nel $CM$ e quindi nel $LAB$ (unidimensionale, lungo linea d'urto), di cui il primo con $v_1$ e il secondo fermo:

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{v_1}{2} = \frac{v_1}{2} &(260)\\ \hat{v}_2 &= 0 - v_{CM} = -\frac{v_1}{2} &(261)\\ \hat{v}_1' &= -\frac{v_1}{2} &(262)\\ \hat{v}_2' &= \frac{v_1}{2} &(263)\\ v_1' &= v_{CM} + \hat{v}_1' = \frac{v_1}{2} - \frac{v_1}{2} = 0 &(264)\\ v_2' &= v_{CM} + \hat{v}_2' = \frac{v_1}{2} + \frac{v_1}{2} = v_1 &(265) \end{aligned}$$

riottenendo lo stesso risultato visto precedentemente, vedi (250)-(251).

## 13.4

Ancora su energia potenziale:
**Esempio 3** (forza di gravità, caso generale).

$$\Delta E_p|_{R_0}^{R} = G\,M\,m\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right). \qquad (266)$$

Non si può scegliere $R_0 = 0$, in quanto $\Delta E_p|_{R_0}^{R} \rightarrow \infty\ \forall R$. Si potrebbe scegliere $R_0$ uguale al raggio del pianeta. Si preferisce scegliere lo zero in corrispondenza di

$R_0 \to \infty$, ovvero in corrispondenza del suo massimo (idem per forza di Coulomb):

$$E_p(R=\infty) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; E_p(R) = -\frac{G\,M\,m}{R}\;\; : \tag{267}$$

niente di veramente strano: quello che conta è che, passando da $R_1$ a $R_2$ con $R_2 > R_1$, si abbia $E_p(R_2) > E_p(R_1)$:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p|_{R_1}^{R_2} &= E_p(R_2) - E_p(R_1) & (268)\\
&= -\frac{G\,M\,m}{R_2} - \left(-\frac{G\,M\,m}{R_2}\right) & (269)\\
&= G\,M\,m\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). & (270)
\end{aligned}$$

Esempio: Calcolo della velocità di fuga:

$$\begin{aligned}
E_p(R_T) + E_c(R_T) &= E_p(\infty) + E_c(\infty) & (271)\\
-\frac{G\,M\,m}{R_T} + \frac{1}{2}\,m\,v^2 &= 0 + 0 & (272)\\
\rightarrow\;\; v &= \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_T}} = \sqrt{2\,g\,R_T}\,. & (273)
\end{aligned}$$

[Si noti come questa velocità sia $\sqrt{2}$ volte (ovvero +40%) quella per tenere un satellite in orbita radente sulla superficie terrestre.
Nota: il fatto che sia la velocità di fuga che quella del satellite in orbita radente siano proporzionali a $\sqrt{GM/T_T} = \sqrt{gR_T}$ deriva da semplici considerazioni dimensionali, in quanto in entrambi i casi si tratta di una velocità che può solo dipendere da $G$, $M$ e $R_T$.]
Si noti inoltre come la velocità di fuga è uguale anche alla velocità con la quale la particella colpisce la superficie del pianeta (ovviamente sempre trascurando l'atmosfera) se viene 'catturata dal pianeta' (ovvero era inizialmente molto lontana e con velocità 'piccola' — rispetto a quella finale).

## 13.5

Espressione della forza dalla funzione energia potenziale. Essendo

$$E_p(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,\mathrm{d}x + \text{costante}\,,$$

segue

$$F(x) \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} \tag{274}$$

### 13.6 Problemi

1. Inventarsi dei problemi numerici sui vari casi di urti elastici visti sopra.
2. Calcolare la velocità di fuga dalla Terra, dalla Luna e da Giove (cercarsi i dati mancanti).
3. Date le diverse espressioni di energia potenziale incontrate, ricalcolarsi l'espressione delle forze da $F(x) = -\mathrm{d}E_p(x)/\mathrm{d}x$.

## 14 Venerdi 27/4, 16:00–18:00

### 14.1

Ancora sulla energia potenziale e forze.
Si può verificare facilmente come, nei tre casi incontrati, dall'espressione dell'energia potenziale si riottiene la forza:

$$E_p(h) = mgh \quad \Rightarrow \quad F(h) = -\frac{\mathrm{d}E_p(h)}{\mathrm{d}h} = -mg \tag{275}$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = -kx \tag{276}$$

$$E_p(R) = -\frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad F(R) = -\frac{\mathrm{d}E_p(R)}{\mathrm{d}R} = -\frac{GMm}{R^2} \tag{277}$$

### 14.2

Nota: forza di Newton e forza di Coulomb: analogie e diversità: entrambe vanno come $1/d^2$, ma la prima è sempre attrattiva, con fattore di proporzionalità $Gm_1m_2$, la seconda ha fattore di proporzionalità $kq_1q_2$ ed è quindi attrattiva o repulsiva a seconda che il prodotto delle cariche sia negativo o positivo.
Ne segue, comunque, che per analogia, l'energia potenziale di due cariche vale $E_p(d) = kq_1q_2/d$.
Un esercizio sulla somma delle forze: tre cariche uguali disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $l$.

### 14.3

Riassumiamo le diverse espressioni dell'energia potenziale incontrate, scrivendo anche lo zero di riferimento:

| | | |
|---|---|---|
| forza $-mg$ | $E_p(h) = mgh$ | $E_p = 0$ per $h = 0$ ($h$ positivo verso l'alto) |
| molla | $E_p(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2$ | $E_p = 0$ per $x = 0$ |
| gravità (caso generale) | $E_p(x) = -\frac{GMm}{R}$ | $E_p = 0$ per $R = \infty$ |

Si noti come quest'ultima definizione (valida ad ogni distanza $R \geq R_T$)[6] è compatibile con $E_p(h) = m\, g\, h$, se si pensa che quest'ultima sia valida in prossimità della superficie terrestre, ove le varizioni di $g$ con l'altezza sono trascurabili. Espansione[7] di $E_p(R)$ intorno a $R_T$:

$$
\begin{aligned}
E_p(R_T + h) &= -\frac{GMm}{R_T + h} && (278)\\
&= -\frac{GMm}{R_T(1 + h/R_T)} \times \frac{1 - h/R_T}{1 - h/R_T} && (279)\\
&= -\frac{GMm(1 - h/R_T)}{R_T(1 - (h/R_T)^2)} && (280)\\
&\approx -\frac{GMm(1 - h/R_T)}{R_T} = -\frac{GMm}{R_T} + \frac{GMm}{R_T^2}\, h && (281)\\
&\approx E_p(R_T) + mgh && (282)\\
&\approx E_p(R_T) + E_p|_{R_T}(h)\,, && (283)
\end{aligned}
$$

avendo chiamato $E_p|_{R_T}(h) = mgh$ il potenziale rispetto a $R_T$ e avendo trascurato $(h/R_T)^2$ nel passaggio dalla (280) alla (281).

[6]Per $R < R_T$ abbiamo visto come la forza cresce con $R$ e quindi abbiamo un'espressione dell'energia potenziale simile a quella della molla:

$$E_p(R) = \frac{1}{2}\,\frac{mg}{R_T}\, R^2 \qquad (R < R_T)\,.$$

[7]Si ricorda, a proposito, che se $\epsilon \ll 1$ allora: $1/(1+\epsilon) \approx 1 - \epsilon$; $(1+\epsilon)^2 \approx 1 + 2\epsilon$; $\sqrt{(}1+\epsilon) \approx 1 + \epsilon/2$.

## 14.4

Studio della curva $E_p$ (in paricolare, caso della molla). Caso unidimensionale ($x$ è la generica variabile e non rappresenta necessariamente la coordinata spaziale '$x$'): $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$. Grafici per potenziali $mgz$, $1/2\,kx^2$ e $-GMm/r$. Punti di **equilibrio** (forza si annulla, ovvero $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ si annulla): stabile, instabile o indifferente, a seconda del verso della forza quando ci si sposta dalla posizione di equilibrio. Equilibrio stabile o instabile: minimo o massimo (locali) di $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$; derivata seconda positiva o negativa.
Analogia montagne russe.

## 14.5

Forze non conservative e trasformazione in calore dell'energia meccanica: esempi, incluso esperimento storico del mulinello di Joule (Inizio $E_c = 0$, $E_p = mgh$; fine: $E_c \approx 0$, $E_p = 0 \rightarrow$ l'acqua del mulinello si è scaldata ed, in particolare, l'incremento di temperatura è proporzionale al lavoro meccanico eseguito:

$$\Delta T \quad \propto \quad L\,. \tag{284}$$

[Nota: potremmo usare tale esperimento per definire il grado, ad es. come "differenza di temperatura in un kg di acqua quando questa viene scaldata con 1 Joule di energia", o qualcosa del genere, ma storicamente le cose sono andate diversamente.).]

## 14.6

**Temperatura** e **calore**: dal livello percezionale/intuitivo alle definizioni operative. Cominciamo con la temperatura:

- Il concetto fisico di temperatura è un raffinamento della nostra percezione sensoriale del caldo e del freddo.
- Le percezioni possono essere ingannevoli, in quanto noi siamo sensibili alla rapidità con cui assorbiamo o emettiamo calore attraverso la pelle: oggetti (verificabili strumentalmente) alla stessa temperatura ci appaiono più o meno caldi a seconda di quanto trasmettono il calore (es metalli o marmo rispetto a legno, plastica o polistirolo; gli oggetti metallici ci sembrano freddi degli altri quando sono a temperatura inferiore alla nostra temperatura

corporea, ma a temperatura superiore ci sembrano più caldi, vedi es. in sauna). Famoso è il 'chilly factor' che dà la temperatura ambiente 'percepita' e che dipende da umidità e velocità del vento.

- I termometri sono basati sull'osservazione che alcuni corpi cambiano qualche loro proprietà al variare della temperatura, ad esempio i metalli variano le loro dimensioni, componenti elettrici possono cambiare corrente o tensione, etc. Il caso più famoso è quello del mercurio, che ha una forte espansione termica.

- Per definire la scala termometrica è importante avere dei riferimenti. Si potrebbe usare un termometro di riferimento (in analogia al campione di kg), ma la scala oltre che arbitraria (e in principio non ci sarebbe niente di male) è difficilmente riproducibile.
  Osservazione della stabilità della temperatura in coincidenza con i cambiamenti di fase (ghiaccio $\rightarrow$ acqua; ebollizione). Il caso dell'acqua è particolarmente comodo in quando le temperature di interesse sono tipiche dell'esperienza quotidiana. Scala centigrada (quella usuale). Assunzione di linearità dell'innalzamento della colonnina di mercurio; cenno ai problemi per estendere la scala termometrica a basse ($\ll 0^o$ C) o alte ($\gg 100\,^o$C) temperature. (Per ora, per quello che ci interessa, assumiamo l'esistenza di termometri opportunamente tarati).

- Alla base delle misure termometriche e degli scambi di calore c'è il **principio zero della termodinamica**: due corpi messi a contatto raggiungono la stessa temperatura (si termalizzano).

- Per misurare la temperatura di un corpo dobbiamo mettere in contatto con esso il termometro ed attendere lo stabilizzarsi della temperatura (tipicamente, se il corpo è 'grande' il termometro raggiungerà la temperatura del corpo, ma in generale termometro e corpo raggiungeranno una temperatura comune di equilibrio – vedi nel seguito).

- Proprietà transitiva: se il termometro in equilibrio prima con $A$ e poi con $B$ e all'equilibrio misuriamo lo stesso valore di temperatura, diremo che $A$ e $B$ sono alla stessa temperatura (e quindi in equibrio termico), anche se alle nostre sensazioni uno dei due sembra più freddo dell'altro.

Passiamo adesso al calore, cominciando, anche in questo caso, con osservazioni vaghe.

- Originariamnte il concetto di calore è legato a quello di sorgente di calore, tipicamente fuoco o raggi solari.

- Questa entità, ancora da definire operativamente, è quella che scalda i corpi, ovvero provoca variazioni di temperatura.

- è un dato di fatto che esistono sorgenti di calore più o meno 'potenti' (nel senso colloquiale del termine, per ora), ovvero capaci di scaldare più o meno rapidamente i corpi (ovvero di 'fornire più o meno calore nell'unità di tempo').

- A parità di sorgente di calore, l'innalzamento di temperatura dipende dal tempo di funzionamento (a parte quando la temperatura è in corrispondenza delle transizioni di fase, ma questa è un'altra storia).

- La stessa sorgente di calore, tenuta in funzione lo stesso tempo (ovvero avendo fornito la stessa quantità di calore), scalda diversamente sostanze diverse e , a parità di sostanza, scalda diversamente diverse quantità di quella sostanza (es. pentolino o pentolone d'acqua su fornello domestico):

$$\Delta T \propto Q \tag{285}$$

$$\Delta T \propto \frac{Q}{M} \tag{286}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{c\,M}\,, \tag{287}$$

  ove $M$ è la massa del corpo, $Q$ è la quantità di calore e $c$, legato al coefficiente di proporzionalità della (286), è il *calore specifico*, una proprietà del corpo che dipende anche dalla temperatura, e quindi andrebbe scritto come $c(T)$ e quindi la (287) andrebbe riscritta come

$$\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}Q}{c(T)\,M}\,. \tag{288}$$

- Scrivedo il fattore di proporzionalità della (285) come $1/C$, definiamo la *capacità termica* $C$ come

$$C = \frac{Q}{\Delta T}\,: \tag{289}$$

  minore è lo sbalzo termico $\Delta T$ a parità di calore assorbito, maggiore è la capacità termica del corpo. Analogia di capacità volumetriche assumendo recipienti circolare di diversa sezione: il recipiente più capiente è quello in cui il livello del liquido si innanza di meno a parità di liquido introdotto. Ovviamente $C = c\,M$ e $c = C/M$ ("calore specifico: capacità per unità di massa").

- Definizione della *caloria* (cal): "quantità di calore per innalzare la temperatura di 1 g di acqua di un grado intorno a 15 $^o$C" (ovvero da 14.5 $^o$C a 15.5 $^o$C). *Caloria* (kcal = 1000 cal): idem per 1 kg di acqua. Nota: il valore di riferimento per definire la caloria è dovuto al fatto che $c$ dipende dalla temperatura (piccola dipendenza, trascurabile per molte applicazioni pratiche e per i problemi didattici).

- Notiamo dalla (287) come tale definizione di caloria implica anche aver assunto unitario il calore specifico dell'acqua intorno a 15 $^o$C, infatti

$$1\,^o\mathrm{C} \;=\; \frac{1\,\mathrm{cal}}{c_{H_2O}(15^o\mathrm{C})\,1\,\mathrm{g}} \qquad (290)$$

  implica $c_{H_2O}(15^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{cal}/(\mathrm{g}\,^o\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{kcal}/(\mathrm{kg}\,^o\mathrm{C})$.
  Si noti come la capacità termica è misurata in cal/$^o$C.

## 14.7

Scambio termico fra corpi (che formano un sistema termicamente isolato) a temperature iniziali diverse che raggiungono l'equilibrio termico (es. due liquidi non reagenti miscelati in un thermos). Siano $M_1$, $c_1$ e $T_1$ massa, calore specifico e temperatura iniziale del primo corpo; $M_2$, $c_2$ e $T_2$, idem per il secondo.

- Principio zero della termodinamica: i due corpi raggiungeranno una temperatura di equilibrio $T_e$.

- In assenza di sorgenti termiche, se un corpo si scalda, assorbendo calore. vuol dire che l'altro lo ha ceduto:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= 0 & (291)\\ C_1\Delta T_1 + C_2\Delta T_2 &= 0 & (292)\\ c_1M_1\Delta T_1 + c_2M_2\Delta T_2 &= 0 & (293)\\ c_1M_1(T_e - T_1) + c_2M_2(T_e - T_2) &= 0\,, & (294)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{c_1 M_1 T_1 + c_2 M_2 T_2}{c_1 M_1 + c_2 M_2} && (295) \\ &= \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}\,. && (296) \end{aligned}$$

La temperatura di equilibrio è pari alla media delle temperature iniziali pesate con le capacità termiche (e ovviamente la formula si può estendere all'equilibrio simultaneo fra $n$ corpi, sempre non reagenti chimicamente). Esempi: corpo in mare; normale termometro a mercurio che 'misura' la temperatura di una goccia di acqua.

Un caso di interesse sia didattico che pratico è quando un recipiente entra nello scambio termico (ad esempio si aggiunge acqua calda ad acqua fredda contenuta in una tazza). Indicando con $Q_0$ la quantità di calore scambiata dal recipiente, inizialmente alla temperatura $T_1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} Q_0 + Q_1 + Q_2 &= 0 && (297) \\ C_0 \Delta T_1 + C_1 \Delta T_1 + C_2 \Delta T_2 &= 0 && (298) \\ (C_0 + C_1)\,(T_e - T_1) + C_2 (T_e - T_2) &= 0\,, && (299) \end{aligned}$$

da cui

$$T_e = \frac{(C_0 + C_1) T_1 + C_2 T_2}{(C_0 + C_1) + C_2} = \frac{(C_0 + C_1) T_1 + C_2 T_2}{C_0 + C_1 + C_2}\,. \qquad (300)$$

In sostanza, per tornare al nostro esempio, tazza ed acqua alla stessa temperatura iniziale si comportano come un unico corpo che ha capacità termica pari alla somma delle due capacità termiche. A volte si parla di 'equivalente in acqua' di un recipiente, ovvero si considera una massa di acqua di capacità termica pare alla capacità termica del recipiente.

## 14.8

### Problemi

1. Calcolare, con le regole di approssimazione: $1/0.997$, $1.005^2$, $5.010^2$ (si riduca prima alla forma $[\alpha\,(1+\epsilon)]^2$, $1/\sqrt{(}1.04)$.

2. Si hanno 50 litri di acqua a 80 gradi. Quant'acqua fredda (15 gradi) bisogna aggiungere per ottenere una temperatura di equilibrio di 35 $^o$C?

3. 100 g di alluminio (calore scpecifico circa 1/5 di quello dell'acqua) a 80 gradi sono immersi in 200 g di acqua a 20 gradi: trovare temperatura di equilibrio.

4. Un oggetto di 100 g è estratto dall'acqua in ebollizione e raffreddato in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Sapendo che la temperatura di equilibrio dell'oggetto e dell'acqua è 24.5 gradi, calcolare il calore specifico dell'oggetto sia in cal/g $^o$C che in J/kg $^o$C.

5. Una caraffa contiene un litro di acqua a 20 $^o$C. Successivamente vengono aggiunti 100 cm$^3$ di acqua a 100 $^o$C. Sapendo che inizialmente caraffa e acqua erano in equilibrio termico e che la temperatura finale di equilibrio è pari a 25 $^o$C, calcolare la capacità termica della caraffa (si trascurino gli scambi termici con l'ambiente). Esprimere inoltre la capacità termica della caraffa in 'equivalente in acqua' del recipiente.

# 15 Venerdi 4/5, 16:00–18:00

## 15.1

Le relazioni (284) e (285) sono fondamentali per arrivare ad un concetto generale di energia. $L$ e $Q$ producono, a parità di sostanza e di massa, la stessa variazione di temperatura.

Torniamo all'esperimento di Joule: quanto scalda un Joule di lavoro? Empiricamente, $1\,\mathrm{J} = 1/4.184\,\mathrm{cal}$, ovvero $1\,\mathrm{cal} = 4.184\,\mathrm{J}$, o $1\,\mathrm{kcal} = 4.184\,\mathrm{kJ}$,
**Esempio**: mulinello di Joule contenente 100 g di acqua a 20 $^o$C, attivato da un peso da 50 kg che scende di 10 m. Lavoro compiuto dalla forza peso: $mgh = 4900\,\mathrm{J}$ $\rightarrow$ 1171 cal $\rightarrow \Delta T = 11.7\,^o$C, ovvero temperatura finale di 31.7 $^o$C.

## 15.2

Conservazione dell'energia, caso generale. Se solo forze conservative si conserva energia meccanica (cinetica + potenziale). Altrimenti l'energia meccanica che sparisce si trasforma in energia termica: $\rightarrow$ l'energia dell'acqua dell'esempio precedente è aumentata di 4900 J: quantità di calore $\Leftrightarrow$ variazione di energia interna del sistema [questa osservazion è valida per corpi che (praticamente) non si espandono con la temperatura e rappresenta un primo passo verso il 'primo principio della termodinamica']. Più complicato è, invece, stabilire il valore dell'energia assoluta dell'acqua!

## 15.3

Come è noto, ci sono altre forme di energia, la più famosa delle quali è quella elettrica, ottenuta tipicamente convertendo energia meccanica attraverso opportune turbine ('grosse dinamo'). È anche noto che l'energia elettrica può essere convertita in calore, ad es. nelle stufette elettriche. Anche senza conoscere i dettagli di come l'energia è prodotta, dobbiamo essere in grado di confrontare diverse quantità di energia e saperne calcolare gli effetti termici.
Prima di fare delle applicazioni, introduciamo il concetto di **potenza**, anch'esso un ben preciso concetto fisico mutuato dall'analogo concetto intuitivo: persona/macchina/processo più potente di un altro se riesce a fare più 'lavoro' a parità di tempo. Potenza: $P = L/\Delta t \rightarrow \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$: Watt(W): J/s.
**Esempio**: 1 kg cade da 1 m. Lavoro compiuto dalla forza di gravità: 9.8 J. Se il processo si ripete una volta al secondo (ad esempio da un rubinetto esce un litro di acqua al secondo) $P = L/\Delta t = 9.8\,\mathrm{J}/1\,\mathrm{s} = 9.8\,\mathrm{W}$: questa potenza può essere convertita (eventualmente con qualche perdita dovuta al processo di trasformazione) in potenza elettrica.
**Esempio**: potenza di una centrale idroelettrica:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mgh)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, gh\,, \qquad (301)$$

ove $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ è pari al flusso di acqua (in massa, ovvero in kg/s).
Esempio numerico con dati reali (centrale ENEL della diga sul Tevere di Castel Giubileo, 29/4/05, ore 9:30):

- volume di acqua convogliata alle turbine: 180 $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$;
- dislivello: 7 m;
- potenza elettrica generata: 12 MW

dai quali ricaviamo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 180000\,\mathrm{kg/s}$, da cui $P = 1.80\,10^3\,\mathrm{kg/s} \times 9.8\,\mathrm{m/s}^2 \times 7\,\mathrm{m} = 1.2\,10^7\,\mathrm{W} = 12\,\mathrm{MW}$, in accordo con il dato avuto dalla centrale (vuol dire che, a parte arrotondamenti e approssimazioni, l'efficienza di conversione da

potenza meccanica a potenza termica è molto elevato[8]).
**Esempio**: Uno scaldabagno della potenza di 1000 W funziona per 10 minuti: calcolare la quantità di calore assorbita dall'acqua. $E = P\,\Delta t = 1000\,\mathrm{W} \times 600\,\mathrm{s} = 600000\,\mathrm{J}$, $\rightarrow$ 143 kcal, le quali possono scaldare 70 litri di acqua di circa due gradi.

## 15.4

Potenza, forza e velocità:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \;\; = \;\; \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,. \tag{302}$$

**Esempio**: auto che avanza a 40 km/h costanti impiegando una potenza di 5 kw: calcolare forza del motore e coefficiente $\beta$ della forza di resistenza dell'aria (assunta dipendere linearmente dalla velocità). Chiamando $F_a$ quella che spinge l'auto e $F_R$ la forze di resistenza del mezzo:

$$v = cost \;\; \Rightarrow \;\; a = 0 \;\Rightarrow\; F_{tot} = 0 \tag{303}$$
$$\Rightarrow \;\; F_a + F_R = 0 \tag{304}$$
$$F_a \;\; = \;\; \beta v \tag{305}$$
$$P \;\; = \;\; \beta v^2 \tag{306}$$
$$\beta \;\; = \;\; \frac{P}{v^2} = 40.5\,\frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{m/s})} \;\; = 40.5\ (\mathrm{kg/s}) \tag{307}$$
$$F_a \;\; = \;\; 450\,\mathrm{N}\ \ (\approx 45\,\mathrm{kg}_p) \tag{308}$$

Dalla (306) impariamo come la potenza necessaria per raggiungere una verta velocità va come il quadrato della velocità (finché la resistenza del mezzo cresce linearmente con la velocità, ma questo è vero solo a basse velocità: ad alte velocità la resistenza cresce rapidamente al variare della velocità ed è noto che per aumentare di poco la velocità massima bisogna aumentare di molto la potenza, oltre che cercare di ridurre $\beta$, legata al famoso 'Cx' delle auto).
Breve discussione sul significato del grafici delle riviste di auto/moto (vedi Quattroruote) che riportano potenza e 'coppia' in funzione del 'numero di giri' (rpm): se la coppia è costante, essendo la coppia legata alla forza che spinge la macchina, la potenza cresce linearmente con il 'numero di giri'.

[8] In realtà, ho scoperto successivamente che chi mi aveva fornito queste informazioni mi aveva 'imbrogliato', in quanto il flusso non è misurato direttamente, ma ottenuto da da dislivello e potenza elettrica. È comunque vero che le centrali idroelettriche hanno efficienze elevatissime.

La (302) ci offre un altro modo per spiegare la ragione per la quale quando, istante per istante, la forza è ortogonale alla velocità, allora la forza non compie lavoro:

$$\vec{F} \perp \vec{v} \;\; \Rightarrow \quad P = 0 \;\Rightarrow\; L = 0\,. \tag{309}$$

## 15.5

Alcune unità di misura di energia e di potenza e applicazioni tipiche nella vita quotidiana (auto, caldaie, condizionatori, etc.).

| **Energia** | |
|---|---|
| Unità | Conversione |
| cal 1 | 1 cal = 4.184 Joule |
| (kcal | 1 kcal = 1000 cal = 4184 Joule ) |
| kwh | 1 kwh = 1 kw × 1 h = $3.6\,10^6$ Joule |
| Btu | 1 Btu = 1055 Joule |
| eV $^{(*)}$ | 1 eV = $q_e \times 1$ V= $1.6\,10^{-19}$ Joule |
| **Potenza** | |
| Unità | Conversione |
| HP (CV) | 1 HP = 736 Watt |
| kcal/h | 1 kcal/h = 1.16 Watt |
| Btu/h | 1 Btu/h = 0.293 Watt |

$^{(*)}$ 'Elettronvolt' (Il Volt sarà visto nel seguito)

**Esempio**: quanto vale la potenza termica dissipata da una persona? Assumiamo che 'bruci' 2000 kcal/giorno, calcoliamo la potenza media nell'arco della giornata (si presti attenzione, nella formula che segue alle unità di misura dei fattori di conversione!):

$$P \;=\; \frac{2000\,\text{kcal} \times 10^3\,\text{cal/kcal} \times 4.184\,\text{J/cal}}{24\,\text{h} \times 3600\,\text{s/h}} = 97\,\text{W}\,. \tag{310}$$

Ovviamente essa è diversa nelle diverse ore del giorno (quando si dorme si consuma poco, quando si corre moltissimo). Come ordine di grandezza, possiamo prendere 200 W/persona in stato di normale attenzione.
**Problemini** associati: quanto scaldano 200 persone in un cinema? (dipende se il film è noioso o se è un thriller!). Se l'ambiente è molto piccolo (la dissipazione naturale è bassa, nei cinema moderni capita!), quanto deve essere potente l'impianto di condizionamento (misurato in Btu/h)?

## 15.6

Torniamo ad energia potenziale e forze.
In generale $E_p(\vec{r})$. Componenti della forza: $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, $F_y = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}y$, $F_z = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}z$ e $F_r = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r$ (quando la forza ha una simmetria radiale la forza radiale è di maggior interesse delle componenti cartesiane della forza). Esempio gravitazionale (conti lasciati come esercizio)::

$$\begin{aligned}
E_p(\vec{r}) &= -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} && (311)\\
F_r &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{GMm}{r^2} && (312)\\
F_x &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,x = -\frac{GMm}{r^3}\,x && (313)\\
F_y &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,y = -\frac{GMm}{r^3}\,y && (314)\\
F_z &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{GMm}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\,z = -\frac{GMm}{r^3}\,z && (315)
\end{aligned}$$

Dalle (313)-(315) otteniamo

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^3}\,\vec{r} && (316)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} && (317)\\
&= -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} && (318)
\end{aligned}$$

in quanto, per definizione, il versore $\hat{r}$ è pari a vettore $\vec{r}$ diviso il suo modulo. Ovviamente le (316) e (318) sono assolutamente equivalenti e il cubo al denominatore nella (316) non deve trarre in inganno.

## 15.7

### Problemi

1. Scaldabagno da 80 litri, potenza 1000 W: quanto impiega a scaldare l'acqua da 20 $^o$C a 60 $^o$?

2. Per riscaldare un corpo da 10 a 20 gradi sono necessari 1000 J, calcolare la capacità termica del corpo sia in J/$^o$C che in cal/$^o$C [nota: data l'equivalenza fra Joule e calorie, capacità termiche e calori specifici possono essere espressi sia facendo riferimento ai Joule che alle calorie].

3. Il calore specifico dell'alluminio vale 0.21 cal/g$\,^o$C. Calcolarne il valore in J/kg$\,^o$C.

4. Si immege un blocco di alluminio, di massa 100 g ed inizialmente a 80 gradi in 200 g di acqua inizialmente a 20 gradi. Si calcoli la temperatura finale di equilibrio (si trascuri il contributo del recipiente allo scambio termico).

5. Risolvere il problema precedente assumendo che il recipiente dell'acqua abbia una capacità termica di 50 cal.

6. Si vuole condizionare un piccolo locale in cui ci sono dei computer e accessori che consumano in totale 2000 W. Calcolare la potenza del condizionatore in Btu

7. Cosa si modifica la soluzione del problema precedente se consideriamo che nel locale ci lavorano 5 persone?

8. Fare i conti dettagliati del primo esempio del par. 15.5 e risolvere i problemini che lo segue.

9. Calcolare la potenza in MW di una macchina da corsa da 900 HP.

10. Una caldaia ha una potenza termica di 20000 kcal/h. Calcolare quanto vale il flusso massimo di acqua (in litri/minuto) a 50 gradi che essa riesce a fornire se l'acqua che entra nella caldaia ha una temperatura di 15 gradi.

# 16 Lunedi 7/5, 16:00–18:00

## 16.1

**Calore latente** di fusione e di evaporazione. Durante una transizione di fase (acqua-ghiaccio, acqua-vapore) il sistema assorbe/cede calore senza cambiare la temperatura (esempio quotidiano acqua: che bolle in attesa che ci si decida a buttare giù la pasta). Valori per l'acqua: fusione $\lambda = 80\,\mathrm{cal/g}$; ebollizione: $\lambda = 540\,\mathrm{cal/g}$.

Esempio: 10 g di chiaccio a -10$\,^o$C in 50$\,$g acqua a 20$\,^o$C: $\rightarrow$ temperatura di equilibrio (altra informazione necessaria: calore specifico del ghiaccio, circa 1/2 di quello dell'acqua). Il calore ceduto dai 50 g di acqua inizialmente a 20$\,^o$C serve a: innalzare la temperatura del ghiaccio da $T_g = -10\,^o$C a 0$\,^o$C; far fondere il ghiaccio; innalzare la temperatura del'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio da 0$\,^o$C a $T_e$. In totale abbiamo quindi

$$c_A\, M(T_e - T_A) + c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0) \;=\; 0\,, \qquad (319)$$

ovvero

$$c_A\, M(T_A - T_e) = c_g\, M_g\,(0 - T_g) + \lambda M_g + c_A\, M_g\,(T_e - 0)\,, \qquad (320)$$

con $c_A$ e $c_g$ calori specifici di acqua e ghiaccio. Si ottiene $T_e = 2.5\,^o$C. L'acqua a temperatura ambiente ha perso 885$\,$cal, delle quali: 50 sono servite a scaldare il ghiaccio, 800 a farlo fondere e 25 per portarlo a 2.5$\,^o$C

## 16.2

**Velocità di termalizzazione**.
Le equazioni che abbiamo visto precedentemente, basate sul principio zero della termodinamica e sul fatto ci considerare corpi che costituiscono un sistema isolato ci forniscono la temperatura di equilibrio, ma non ci danno alcuna informazione su quanto ci mette il sistema a raggiungere l'equilibrio.

Termalizzazione verso una temperatura $T_f$ di un corpo di capacità termica 'infinita' (es. $T_f$ ambiente costante). Dato il coefficiente di 'dispersione termica'[9] $\eta$ e lo sbalzo termico $(T_f - T)$ istantaneo fra la temperatura asintotica e quella del corpo che si stà termalizzando, il calore trasferito in d$t$ vale

$$\mathrm{d}Q \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \qquad (321)$$

ovvero

$$C\mathrm{d}T \;=\; \eta\,(T_f - T)\,\mathrm{d}t, \qquad (322)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,. \qquad (323)$$

[9] Chiamiamo così la costante $\eta$ che compare nella (321) e seguenti. Essa è legata a superficie di contatto $A$, spessore dello strato isolante $\Delta x$ e *conducibilità termica* del materiale $\lambda$ secondo la seguente formula:

$$\eta = \lambda \frac{A}{\Delta x}\,.$$

Le dimensioni di $\eta$ sono quindi cal/(grado$\cdot$secondo), ovvero anche Watt/grado. Le dimensioni della conducibilità termica sono invece cal/(grado$\cdot$metro$\cdot$secondo)

$\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ ha, chiaramente il significato di 'velocità di termalizzazione'. Si nota che essa è proporzionale, istante per istante dalla differenza di temperatura rispetto a quella finale, è anche proporzionale a $\eta/C = \eta/cM$, una costante che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo (semplice controllo dimensionale).

### 16.2.1 Potenza dei termosifoni

Se siamo interessati alla potenza dissipata da un corpo che tende a termalizzarsi, basta riscrivere la (321) come

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \eta\,(T_f - T) \qquad (324)$$

$$P = \eta_w\,(T_f - T), \qquad (325)$$

ove $\eta_w$ è l'analoga di $\eta$, ma espressa in Watt/grado. Per avere un ordine di grandezza delle potenze in gioco, cerchiamo su un sito di costruttore di termosifone le specifiche tecniche. Ad esempio, su `http://www.faral.com/italiano/id2.htm` leggiamo che gli elementi da 88 cm dissipano 163 Watt/elemento per $\Delta T = 50\,^o$C, ovvero $\eta_w = 3.3\,\mathrm{W}/^o\mathrm{C}$. Vi vede inoltre che con buona approssimazione, a parità si tipo di elemento, $\eta_W$ scala circa con l'altezza degli elementi (si confronti con la formula che lega $\eta$ alla conducibilità termica e alla geometria degli elementi e si cerchi di farsi un'idea del perché).

### 16.2.2 Soluzione della (323) — primo approccio

La (323) ci dice che la velocità di termalizzazione è proporzionale alla 'distanza' dalla temperatura di equilibrio. Quindi è massima all'inizio e tende a zero asintoticamente (ovvio: quando il corpo si e' termalizzato la sua temperatura cessa di variare).

Se introduciamo $\theta = T - T_f$, possiamo riscrivere la (323) come

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\eta}{c\,M}\,\theta = -\alpha\theta\,, \qquad (326)$$

avendo chiamato $\alpha$ il fattore di proporzionalità $\eta/c\,M$ (si ragioni sul significato del segno meno, voluto — altrimenti poteva definire $\theta$ con il segno opposto!). Quanto vale $\theta(t)$? Ovvero qual'è la funzione tale che la sua derivata, istante per istante, è proporzionale a valore della funzione in quell'istante? Una volta trovato $\theta(t)$, otteniamo, banalmente, $T(t) = \theta(t) + T_f$. Ci ritorneremo.

## 16.3

Discussione sui risultati del paragrafo 15.6 della lezione scorsa (conti lasciati come esercizio).

## 16.4

Ovviamente anche la forza elettrostatica ('di Coulomb') può essere scritta in modo analogo:

$$\vec{F} = \frac{k_0\, Q\, q}{r^3}\,\vec{r} \tag{327}$$

$$= \frac{k_0\, Q\, q}{r^2}\,\hat{r}\,. \tag{328}$$

(Si ricorda che $k_0 = 9 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$.)
Lavoro compiuto dalla forza di Coulomb: analogo di quanto visto a proposito della forza gravitazionale. Energia potenziale (con riferimento rispetto $E_p(\infty) = 0$):

$$E_p = \frac{k_0\, Q\, q}{r} \tag{329}$$

Grafici di $E_p$ nei casi $Q\,q > 0$ e $Q\,q < 0$ (quest'ultimo ha stessa forma di quello gravitazionale; il primo è invece ribaltato rispetto all'asse $r$). Esempio dell'avvicinamento di due nuclei 'sparati' a grande velocità: barriera di potenziale (e importanza nella fusione nucleare controllata).

## 16.5

**Potenziale elettrostatico**: "energia potenziale per unità di carica", ovvero

$$V = \frac{k_0\, Q}{r} \tag{330}$$

Comodo in quanto, se si conosce la differenza di potenziale fra due punti, $\Delta V_{AB} = V_B - V_A$ (ovvero $\Delta V_{AB} = \Delta V_{A\to B}$), si calcola facilmente variazione di energia potenziale e quindi lavoro compiuto dalla forza elettrostatica quando una carica $q$ è spostata dal punto $A$ al punto $B$:

$$\Delta E_p|_A^B = q\,\Delta V_{AB} = -\,L|_A^B \tag{331}$$

(Nota: se da $A$ a $B$ il potenziale decresce, ovvero $\Delta V_{AB} < 0$ la forza elettrostatica compie lavoro positivo, ricordare analogia gravitazionale). Unità di misura del potenziale elettrostatico: Volt (V): 1 Joule = 1 Volt × 1 Coulomb.

Quindi $L|_A^B = -q\Delta V_{AB} = q\,(V_A - V_B)$. Se $q > 0$, ne segue che $L|_A^B > 0$ se $V_A > V_B$; $L|_A^B < 0$ se $V_A < V_B$. Se $q < 0$ è l'opposto.

**Campo elettrico** 'generato' da una carica puntiforme: forza per unità di carica. Linee di forza e significato di campo vettoriale. Unità di misura del campo elettrico (N/C, o più comunemente V/m, per i motivi che saranno chiari nel seguito).

## 16.6

Riepilogo forza gravitazionale e coulombiana:

| | Gravità | Coulomb |
|---|---|---|
| $F$ | $-\frac{G\,M\,m}{r^2}$ | $\frac{k_0\,Q\,q}{r^2}$ |
| $\vec{F}$ | $-\frac{G\,M\,m\,\vec{r}}{r^3}$ | $\frac{k_0\,Q\,q\,\vec{r}}{r^3}$ |
| campo | $\vec{g} = -\frac{G\,M\,\vec{r}}{r^3}$ | $\vec{E} = \frac{k_0\,Q\,\vec{r}}{r^3}$ |
| $E_p$ | $-\frac{G\,M\,m}{r}$ | $\frac{k_0\,Q\,q}{r}$ |
| potenziale | $-\frac{G\,M}{r}$ | $V = \frac{k_0\,Q}{r}$ |

## 16.7 Problemi

1. Trovare la soluzione numerica dell'esempio dei 10 g di ghiaccio in 50 g di acqua.

2. In attesa di buttar giù la pasta, si tiene una pentola in ebollizione ed evapora un litro di acqua. Calcolare l'energia sprecata (in kwh).

3. Si vuole raffreddare un bicchiere d'acqua (200 g) da 30 gradi a 10 gradi mettendoci del ghiaccio inizialmente a zero gradi. Quanta acqua ci sarà nel bicchiare all'equilibrio?

4. Stesso problema, con 50 g di cognac (40% di alcool in volume). Quanto varrà la gradazione alcolica finale?

5. Sapendo che lungo la coordinata $x$ il campo elettrico è costante e che in $x_1 = 1\,\mathrm{m}$ il potenziale vale 100 V e che in $x_2 = 2\,\mathrm{m}$ vale -100 V, calcolare modulo e verso del campo elettrico.

6. Si sa che in una certa regione di spazio il campo elettrico è costante, diretto verso l'alto (ovvero lungo $z$) e di intensità 100 V/m. Calcolare la differenza di potenziale fra la quota $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $z_2 = 50\,\mathrm{cm}$

7. Sul problema precedente: trovare l'espressione del potenziale in funzione di $z$, avendo assunto $V(z = 0) = 0$.

8. Una particelle carica positiva di $+10^{-8}\,\mathrm{C}$ si sposta da un punto di potenziale 100 V ad un punto di potenziale 10 V. Calcolare la variazione di energia cinetica del corpo. Sapendo inoltre che la particella era inizialmente ferma e che raggiunge una velocità finale di 10000 m/s, calcolare la massa della particella.

9. Calcolare la differenza di potenziale richiesta per portare un elettrone ad una velocità pari ad un decimo della velocità della luce ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$).

10. Un elettronvolt (simbolo 'eV') è definito come l'energia che un elettrone acquista quando attraversa una differenza di potenziale di 1 V. Trovare il fattore di conversione elettronvolt $\rightarrow$ Joule. Trovare la velocità di un elettrone di 1 eV.

11. Sapendo che un protone ha una massa di $1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, trovare la velocità di un protone di 1 eV.

12. Sapendo che un protone ha la stessa carica di un elettrone, ma di segno apposto, calcolare quanto vale la velocità di un protone che, partendo da fermo, attraversa una differenza di potenziale di 1 milione di Volt.

13. Calcolare la forza e l'energia potenziale di due protoni distanti 1 mm, 1 $\mu$m e 1 nm.

14. Si immaginino due protoni vincolati a muoversi sull'asse $x$ e che, partendo da distanze 'molto grandi' ('$\infty$') e con la stessa velocità iniziale, si vanno

incontro. Sapendo che ciascuno di essi aveva un'energia iniziale di 1 MeV ($10^6$ eV) si determini la distanza minima alla quale essi si avvicineranno prima di essere ritornare indietro.

15. Una carica di $+2\,10^{-10}$ C viene spostata dal punto $A$ al punto $B$. Sapendo che $V(A) = 2\,\mathrm{V}$ e $V(B) = 5\,\mathrm{V}$, calcolare il lavoro compiuto dal campo elettrico.
16. Sapendo che $V(A) - V(B) = 12\,\mathrm{V}$ e che quando la carica $q$ si sposta da $A$ a $B$ il campo elettrico compie il lavoro di $6\,10^{-12}$ J, calcolare il valore di $q$.

# 17 Venerdi 11/5, 16:00–18:00

## 17.1

Energia potenziale e forza; potenziale e campo elettrico.
Si noti che, essendo il campo elettrico pari alla forza elettrica per unità di carica ed essendo il potenziale elettrico pari all'energia potenziale per unià di carica, campo e potenziale elettrici sono legati dalle stesse relazioni che legano forza e potenziale elettrici:

$$\Delta E_p|_A^B = -\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \iff \Delta V|_A^B = -\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \tag{332}$$

che diventano, se forza o campo elettrico sono <u>costanti</u>

$$\Delta E_p|_A^B = -F \cdot \Delta s \iff \Delta V|_A^B = -E \cdot \Delta s\,. \tag{333}$$

Analogalmente, il campo elettrico può essere ottenuto come derivata della funzione potenziale

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \iff E_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{334}$$

$$\text{(etc. per le altre componenti)} \tag{335}$$

che in caso di forza o campo uniforme in $\Delta x$ diventano

$$F_x = -\frac{\Delta\, E_p}{\Delta\, x} \iff E_x = -\frac{\Delta\, V}{\Delta\, x} \tag{336}$$

### 17.2

Soluzione di alcuni problemi (n. 5, 6 e 8 lezione precedente).

### 17.3

Forza elettrostatica e campo elettrostatico dovuto a molte cariche:

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_i \vec{F}_q^{Q_i}(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i\, q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i) \tag{337}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i E_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}_i)\,, \tag{338}$$

ove $\vec{r}_i$ è la posizione nello spazio della carica $i$-ma. Esempio: cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato $l$ $\rightarrow$ calcolare la forza su ciascuna carica dovuta alle altre due.

Ne segue che, essendo l'energia potenziale pari al lavoro totale compiuto da tutte le cariche $Q_i$ per portare $q$ da $\vec{r}$ all'infinito, esso è pari alla somma dei lavori delle forze di ciascuna carica, anche il potenziale è pari alla somma dei potenziali:

$$V(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{k_0\, Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\,. \tag{339}$$

Ovviamente, se invece di un certo numero di cariche puntiformi abbiamo una distribuzione di cariche, le somme diventeranno degli integrali (somme su infiniti elementi infinitesini di cariche), ma la sostanza non cambia. Inoltre, in genere nei libri si incontrano diversi paragrafi su come calcolare campo e potenziale per delle distribuzioni di cariche 'da manuale' (piano, filo, anello, etc.). In questo corso non ci interesseremo di tali argomenti.

### 17.4

Ci interesseremo, invece, ad alcuni aspetti dell'elettricità, innanzitutto al fatto che:

- i conduttori, nei quali le cariche elettriche sono libere di muoversi, formano delle superfici equipotenziali (altrimenti le cariche su di essi non sarebbero all'equilibrio);

- esistono opportuni dispositivi, chiamati generatori di tensione, in grado di mantenere una differenza di potenziale costante fra i loro capi;
- i conduttori permettono di 'trasportare' le differenze di potenziale (vedi esperimento in aula con batteria e fili);
- quando una carica $q$ va da un conduttore all'altro, la cui differenza di potenziale vale $\Delta V$, il campo elettrico compie su di essa un lavoro pari a $q\,\Delta V$, indipendentemente dal percorso effettuato (forza conservativa!).

(Vedremo inoltre in seguito resistenze e condensatori.)

## 17.5

Differenza di energia potenziale e differenza di potenziale per forze elettriche. Materiali conduttori, mobilità delle cariche elettriche e superfici equipotenziali (introduzione qualitativa, tanto per convincersi che le superfici equipotenziali esistono e che, tramite conduttori le differenze di potenziale possono essere trasportate in punti diversi).
**Generatore**: dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi una differenza di potenziale (potenziale più alto: 'polo positivo'; potenziale più basso: 'polo negativo'; siccome il potenziale è definito a meno di una costante additiva, si sceglie usualmente lo zero in corrispondenza del polo 'negativo') e di trasportare, al suo interno, delle cariche positive dal polo negativo a quello positivo (lavoro fatto contro la forza del campo elettrico, che invece tende naturalmente a far spostare cariche positive dal potenziale più alto al più basso; tale lavoro richiede una forza all'interno del generatore che lo compie: 'forza elettromotrice'). La differenza di potenziale fra il polo positivo e quello negativo del generatore viene indicato con $f$ (per ricordarsi che si tratta di una forza elettromotrice), ma in pratica si usa anche il generico simbolo $V$ (che però non va inteso come potenziale elettrostatico assoluto).

## 17.6

Se gli estremi del generatore sono connessi fra di loro "si può" registrare uno scorrimento di cariche dal polo positivo al polo negativo, ovvero una corrente elettrica (definita come la quantità di carica che scorre nell'unità di tempo, ovvero $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, la cui intensità è misurata in Ampère, A, corrispondente ad un Coulomb al secondo). Il passaggio o meno di corrente e la sua intensità dipendono dal tipo di materiale:

alcuni matriali presentano un piccolo impedimento (**resistenza**) al passaggio di corrente, altri un grande impedimento ed altri ancora non permettono il passaggio delle cariche ('isolanti'). **Legge di Ohm**:

$$I_{A \to B} \;=\; \frac{V_A - V_B}{R}\,, \tag{340}$$

ove $R$ è la resistenza elettrica del materiale, misurata in Ohm ($\Omega$, una resistenza di $1\,\Omega$ fa passare un flusso di cariche di $1\,\mathrm{A}$ fra una differenza di potenziale di $1\,\mathrm{V}$). Attenzione al segno: se $V_A - V_B > 0$ la corrente è positiva (ovvero scorre da $A$ a $B$), altrimenti negativa.
In genere $V_A$ corrisponde al polo positivo e $V_B$ al negativo ed $R$ è la resistenza globale al passaggio di cariche da un polo all'altro. In questo caso la (340) diventa $I = f/R$, con $I$ positiva.
Si noti come la (340) venga spesso riscritta semplicemente come $I = \Delta V/R$ o semplicemente $I = V/R$.
Nota: dal punto di vista fisico sono gli elettroni a muoversi, ed essi vanno dal polo negativo a quello positivo, ma nello studio dei circuiti si usa semplicemente una corrente convenzionale positiva.

## 17.7

**Lavoro** compiuto dalla **forza elettromotrice** $f$ per trasportare (all'interno del generatore) un elemento di carica $\mathrm{d}q$ dal polo negativo al polo positivo:

$$\mathrm{d}L|_{GEN} \;=\; -\,\mathrm{d}L|_{C.E.} = dE_p|_{C.E.} = \mathrm{d}q\,\Delta V = \mathrm{d}q \cdot f\,, \tag{341}$$

ovvero è richieta dal generatore una potenza di

$$P_{GEN} = \frac{\mathrm{d}L_{GEN}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdot f = I \cdot f\,. \tag{342}$$

Quando invece le cariche positive si muovono da polo positivo al polo negativo è il campo elettrico a compiere lavoro positivo $\mathrm{d}q \cdot f$, a cui corrisponde una potenza $I \cdot f$.
Che fine fa il lavoro compiuto dal campo elettrico? $\rightarrow$ analogia meccanica: impianto di risalita e sciatori che tornano alla posizione di partenza sciando:

$$\mathrm{d}L|_{Motore} \;=\; -\,\mathrm{d}L|_{Grav.} = \Delta E_p|_{Grav.} = \mathrm{d}m \cdot (g \cdot h) \tag{343}$$

$$P_M \;=\; \frac{\mathrm{d}L_M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdot (g \cdot h)\,. \tag{344}$$

Si nota l'analogia fra la (344) e la (342). [Si veda anche il problema della potenza della diga, che dava la (301).] Il lavoro positivo fatto dal campo gravitazionale nel riportare gli sciatori alla base va a finire in calore dalle forze di attrito (momentaneamente esso produce anche energia cinetica, ma alla fine anche questa diventa nulla). Analogalmente, le cariche perdono energia cinetica per attrito e alla fine tutto il lavoro compiuto dal campo elettrico termina in calore, il quale riscalda il resistore: **effetto Joule**: la potenza $P = I\,f$ finisce finisce in calore.
Questa relazione è valida ai capi di ogni 'resistore' (elemento del circuito dodato di resistenza) e, scrivendola, come si usa abitualmente, usando il simbolo $V$ per la differenza di tensione ai capi della resistenza e ricordandoci della legge di Ohm, otteniamo

$$\begin{aligned} P &= I\,V && (345)\\ &= \frac{V}{R}V = \frac{V^2}{R} && (346)\\ &= I\,R\,I = R\,I^2\,. && (347) \end{aligned}$$

(Si ricorda che, essendo $P$ una potenza, viene misurata in Watt: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \times 1\,\mathrm{A}$.)

## 17.8

Soluzione di alcuni problemi (n. 6, 7 e 8) di questa lezione.
In particolare, discussione su implicazioni pratiche legate al secondo problema (batteria). Quanta acqua si puo' scaldare di tot gradi usando tutta l'energia di una batteria? Questioni riguardanti l'immagazzinamento di energia nei veicoli elettrici: energia per unita' di massa (espresse in J/kg, kwh/kg o Kcal/kg).
Per confronto, la benzina ha un 'potere energetico' di circa 10000 kcal/kg.

## 17.9

Resistenze in serie (ovvero attraversate dalla stessa corrente), ad esempio $R_1$, $R_2$ e $R_3$. Indicando per semplicità $V_1$, $V_2$ e $V_3$ le differenze di potenziale ai capi di ciascuna e con $V$ la la differenza di potenziale ai capi della serie, dalla legge di Ohm abbiamo:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = I\,R_1 + I\,R_2 + I\,R_3 = I\,(R_1 + R_2 + R_3)\,. \qquad (348)$$

Ma, per definizione,la resistenza complessiva delle tre resistenze in serie, indicata con $R_s$ è data da $V/I$. Otteniamo quindi

$$R_s = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3\,. \tag{349}$$

Vediamo quindi come più **resistenze in serie** si comportano ai fini della corrente che scorre nel circuito come se ci fosse una sola resistenza $R_s$, di valore pari alla somma delle resistenze. In generale:

$$R_s = \sum_i R_i\,. \tag{350}$$

## 17.10

Se siamo poi interessati a calcolare la tensione ai capi di ciascuna resistenza basterà applicare a ciascuna di esse la legge di Ohm: $V_i = R_i\,I$, etc., ovvero

$$V_i = R_i\,I = R_i\,\frac{V}{R_s} = R_i\,\frac{V}{\sum_i R_i} \tag{351}$$

$$= \frac{R_i}{\sum_i R_i}\,V \tag{352}$$

$$\Rightarrow\ V_i^{(serie)} \propto R_i\ : \tag{353}$$

la tensione $V$ ai capi della serie è 'ripartita', fra le varie resistenze, proporzionatamente al valore di ciascuna resistenza: $\rightarrow$ **partitore** di tensione.
Esempi numerici.
Il modello di partitore di tensione giustifica il fatto che, nei normali circuiti a componenti discreti, i conduttori (fili di collegamenti) sono considerati equipotenziali in quanto la loro resistenza è estremamente minore di quella degli altri componenti e quindi la 'caduta' di potenziale lungo di essi è assolutamente trascurabile rispetto alle altre differenze di potenziale.

## 17.11

Resistenze in parallelo: stessa tensione $V$ fra i capi delle resistenza, la corrente differisce da resistore a resistore (complementare delle resistenze in serie); la corrente totale si ripartisce nelle varie resistenze (il flusso totale di cariche si deve conservare), ovvero $\sum_i I_i = I$

$$V_i = V \tag{354}$$
$$I_i = \frac{V_i}{R_i} = \frac{V}{R_i} \tag{355}$$
$$I = \sum_i I_i = \sum_i \frac{V}{R_i} = V \sum_i \frac{1}{R_i}\,. \tag{356}$$

Ma $V/I$ è per definizione la resistenza del sistema di resistenze messe in parallelo, ovvero

$$R_p = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \tag{357}$$
$$\frac{1}{R_p} = \sum_i \frac{1}{R_i}\ : \tag{358}$$

La reciproco della resistenza del parallelo è pari alla somma dei reciproci di ciascuna resistenza. Si capisce inoltre che la resistenza del parallelo è inferiore alla resistenza minima. Se si hanno $n$ resistenze uguali $R$, la resistenza del parallelo vale $R/n$.
Esempio numerico: generatore da $10\,\mathrm{V}$ e tre resistenze, una da $2\,\Omega$ seguita dal parallelo di $2\,\Omega$ e $3\,\Omega$. $\rightarrow$ Valutazione di resistenza equivalente, intensità di corrente, tensione ai capi di ogni resistenza, corrente e potenza per ogni resistenza, potenza totale.

## 17.12 Problemi

1. Un filo conduttore è percorso da una corrente elettrica di $10\,\mathrm{A}$. Calcolare la carica elettrica che attraversa una sezione del filo in 10 minuti. Sapendo che una carica elementare ha una carica di $1.6\,10^{-19}\,\mathrm{C}$, calcolare il numero di cariche elementari che ha attraversato tale sezione di filo.

2. I poli di un generatore da $4.5\,\mathrm{V}$ sono connessi fra di loro da una resistenza di $100\,\Omega$. Calcolare la corrente corrente elettrica che scorre nella resistenza e la potenza dissipata.

3. Sul problema precedente: assumendo che nel generatore (una batteria) sia accumulata una energia di 3600 J, calcolare per quanto tempo la batteria può alimentare il circuito (si assuma che la tensione rimanga costante finché c'è energia e poi cessi improvvisamente).

4. Una macchinetta di caffè da viaggio è alimentata dalla batteria della macchina (12 V) ed è in grado di scaldare 100 g di acqua da 20 $^o$C a 100 $^o$C in cinque minuti. Calcolare: la potenza elettrica erogata dalla resistenza che scalda l'acqua e il valore di tale resistenza.

5. Quanto ci si mette a scaldare la stessa quantità di acqua se la macchinetta viene fatta funzionare a 240 V? (Ammesso che non si rompa...). Nota: si consideri la tensione di 240 V (che è alternata), come se fosse una semplice differenza di tensione continua (si può dimostrare che in effetti, ai fini del riscaldamento di una resistenza esse sono equivalenti, ma questo fa al di là di questo corso).

6. Una resistenza di 10 Ω è percorsa da una corrente di 0.5 A. Assumendo che la resistenza pesi 0.1 g, il materiale abbia un calore specifico 1/10 di quello dell'acqua e la resistenza non sia raffreddata, si calcoli quanto tempo impiega la resistenza a raggiungere la temperatura di 250 $^o$C da una temperatura iniziale di 20 $^o$C.

7. Le caratteristiche di una batteria per automobile (12 V) sono "330 A" (la corrente massima in grado di erogare) e "61 A·h" (ovvero riesce a fornire 1 A per 61 ore, o 61 A per 1 ora, etc). Assumendo tali valori e un comportamento ideale della batteria (niente resistenze interne) calcolare la potenza massima che la batteria riesce a fornire e l'energia (chimica) immagazzinata in essa.

8. Sul problema precedente: di quanti gradi si riesce a scaldare l'acqua di uno scaldabagno da 80 litri usando (con efficienza unitaria!) tutta l'energia di una batteria da 12V e 61 A·h?

9. Tre resistenze, di valore 1, 2 e 3 Ω sono connesse in serie e collegate ad un generatore di tensione di 10 V. Calcolare la corrente che passa nel circuito, la tensione ai capi di ciascuna resistenza e la potenza dissipata da ciascuna di esse.

10. Quattro resistenze uguali, ciascuna da 40 Ω, sono collegate fra di loro in modo che i punto di collegamento formino i vertici di un quadrato (c'è una resistanza fra A e B, una fra B e C, una fra C e D e una fra D ed A). Calcolare quanto vale la resistenza fra $A$ e $C$ e quella fra $A$ e $B$.

11. Uno studente misura il valore di una resistenza nominale di 1 MΩ con un 'multimetro' digitale, mantenedo il contatto fra i capi del resistore e i puntali del multimetro mediante la pressione delle dita. Lo strumento misura

700 kΩ. Determinare la resistenza offerta dal corpo dello studente (fra una mano e l'altra) al passaggio della corrente.

12. Una stufetta da 1000 W è alimentata da una batteria di automobile. Determinare la resistenza elettrica della stufetta e l'intensità di corrente erogata dalla batteria.

13. Sul problema precedente. Si immagini che la batteria sia collegata alla batteria mediante una coppia di cavi, ciascuno di lunghezza 2 m, diametro 2 mm e resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$. Determinare la tensione ai capi della resistenza della stufetta, la potenza elettrica dissipata dalla stufetta e quella dissipata dai cavi.

# 18 Lunedi 14/5, 16:00–18:00

## 18.1

Breve ripasso su forze (gravitazionali o elettriche) dovute a gusci sferici e cenni al[l'esistenza del] teorema di Gauss (formulazione di quest'ultimo fuori programma).

## 18.2

Resistenza di un conduttore cilindrico omogeneo ($\approx$ filo) di lunghezza $l$ e sezione $S$ (area di base del cilindro di 'altezza' $l$):

$$R = \frac{\rho\, l}{S}\,, \tag{359}$$

ove $\rho$ è una costante che dipende dai diversi materiali (e un po' dalla temperatura), chiamata resistività. La (359) è nota come seconda legge di Ohm.

## 18.3

Esercizi su semplici circuiti.

## 18.4

Commenti su 'partitori di tensione'.

## 18.5

Caratteristica delle batterie ed energia immagazzinata: moltiplicando $f = 12\,V$ per '$I \times \Delta t$' $= 61\,$A·h si ottiene direttamente un valore in wh (in questo caso 0.732 kwh).

Effetti pratici delle cadute di potenziale lungo i conduttori: dispositivo ad alto assorbimento di potenza alimentato a bassa tensione (es. motorino di avviamento) e trasporto di energia elettrica mediante linee ad alta tensione.

Discussione e soluzione di problemi sull'importanza dei cavi di alimentazione.

## 18.6

Ripartizione della corrente fra i vari resistori di un parallelo:

$$I_i = \frac{V}{R_i} = \frac{R_p\,I}{R_i} = \frac{R_p}{R_i}\,I \tag{360}$$

$$\Rightarrow \quad I_i^{(parall.)} \propto \frac{1}{R_i}\ : \tag{361}$$

le correnti sono ripartite in modo inversamente proporzionale alle resistenze. Resistenze in parallelo formano un *partitore di corrente*

## 18.7

Esempio di circuito un po' più complesso, con due generatori e tre resistenze. Indicando quattro punti ai vertici di un rettangolo, con $A$ in alto a sinistra e gli altri ($B$, $C$ e $D$) in senso orario:

- $R_1 = 45\,\Omega$ fra $A$ e $C$;
- $R_2 = 10\,\Omega$ fra $B$ e $C$;
- $R_3 = 10\,\Omega$ fra $C$ e $D$;
- $f_1 = 2.1\,$V fra $A$ e $B$, orientato verso $A$ [ovvero $V(A) > V(B)$];
- $f_1 = 1.9\,$V fra $A$ e $D$, orientato verso $A$.

Discussione introduttiva e soluzioni nei casi in cui $f_2 = 0$ o $f_1 = 0$.

## 18.8

Principio di sovrapposizione: la corrente attraverso ciascuna resistenza è pari alla somma algebrica delle correnti che attraversano tale resistenza considerando un generatore di tensione alla volta e sostitituendo gli altri da corti circuiti.

## 18.9

Concetto di maglia e di nodo e leggi (o 'principi') di Kirchhoff dei circuiti elettrici:

**1** La somma algebrica delle correnti che entra in un nodo è nulla:

$$\sum_i I_i = 0\,, \tag{362}$$

ove il segno delle correnti è positivo se le correnti sono entranti nel nodo (dirette verso il nodo) e negativo altrimenti. Alla base di questa legge c'è la conservazione della carica elettrica e quindi, istante per istante, tanta carica arriva in un punto, tanta ne deve uscire (altrimenti si avrebbe un accumulo di carica – si pensi all'analogo idraulico).

**2** Se si parte da un punto del circuito e si segue un percorso chiuso per tornare allo stesso punto (ovvero si percorre una "maglia"), si ritorna allo stesso potenziale, ovvero la somma delle cadute di potenziale lungo la maglia è nulla:

$$\sum_i \Delta V_i = 0\,. \tag{363}$$

## 18.10

Riprendiamo la (363) e la applichiamo al circuito del paragrafo 18.7. Dalla $\sum_i \Delta V_i = 0$ otteniamo sulla maglia A-B-C-D-A (si presti attenzione ai segni):

$$(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) = 0 \tag{364}$$

$$-f_1 - (V_B - V_C) - (V_C - V_D) + f_2 = 0 \tag{365}$$

$$-f_1 - R_2\,I_2 - R_3\,I_3 - f_2 - R_3\,I_3 = 0\,, \tag{366}$$

avendo indicato (arbitrariamente!) $I_2$ e $I_3$ positive nel verso di percorrenza della maglia.

Sulla maglia A-C-D-A, con $I_1$ (ancora arbitrariamente) lungo il verso di percorrenza, si ha

$$\begin{aligned} (V_C - V_A) + (V_D - V_C) + (V_A - V_D) &= 0 \quad (367) \\ -(V_A - V_C) - (V_C - V_D) + f_2 &= 0 \quad (368) \\ -R_1\, I_1 - R_3\, I_3 + f_2 &= 0\,. \quad (369) \end{aligned}$$

Infine, sulla maglia A-B-C-A (con i versi delle correnti fissati dalle convenzioni precedenti):

$$\begin{aligned} (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_A - V_C) &= 0 \quad (370) \\ -f_1 - (V_B - V_C) - (V_C - V_A) &= 0 \quad (371) \\ -f_1 - R_2\, I_2 + R_1\, I_1 &= 0\,, \quad (372) \end{aligned}$$

Come si vede dalle (366), (369) e (372), la (363) può essere riscritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned} \sum_i f_i - \sum_j R_j I_j &= 0 \quad (373) \\ \sum_i f_i &= \sum_j R_j I_j\,, \quad (374) \end{aligned}$$

ove forze elettromotrici e correnti sono positive se concordi con il verso di percorrenza della maglia. (Si noti come le $I_j$ possano essere diverse fra di loro ed anche avere orientamenti discordi in quanto non si sta considerando un semplice circuito con elementi posti in serie, ma una maglia definita su un circuito complicato).

Le (373) e (374) sono i modi usuali di scrivere la seconda legge di Kirchhoff, che, ricordiamo, sostanzialmente è data dalla (363) e che, banalmente, significa che "qualsiasi 'giro' si fa faccia in un circuito si ritorna allo stesso potenziale".

Uso delle leggi di Kirchhoff per risolvere i circuiti:

- si definiscono delle correnti nei diversi tratti, scegliendone arbitrariamente il verso;
- Utilizzando le (362)-(363) si scrivono $n$ equazioni indipendenti, ove $n$ è il numero di correnti incognite.
- Usando le ben note tecniche (sostituzione per casi semplici, metodi di algebra lineare nei casi complicati) si trovano le $n$ correnti (con i loro segni).

## 18.11

Esercizio: soluzione dettagliata del circuito di par. 18.7.
Dalla seconda legge di Kirchhoff, applicata alle tre maglie, abbiamo ottenuto le tre quazioni (366), (369) e (372).
Dalla prima legge di Kirchhoff, applicata ai nodi A e C otteniamo [correnti entranti positive (portano carica al nodo), uscenti negative, con i versi fissati precedentemente (sono arbitrari, ma, una volta fissati, bisogna essere consistenti)]:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (A) \tag{375}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (C)\,. \tag{376}$$

Abbiamo quindi tre incognite e cinque equazioni. Il ché vuol dire che alcune di esse sono dipendenti (portano la stessa informazione fisica). Ad esempio, chiaramente le (375) e (376) dicono la stessa cosa, e quindi se ne può utilizzare solo una. In circuiti semplici, si scartano quelle che a vista sono dipendenti [come le (375) e (376)] e si scelgono quelle più semplici, tenendo conto che tutti gli elementi del circuito compaiano nelle equazioni. Per sistemi più complicati si usano i metodi di algebra lineare (terzo anno? per ora ignoriamo).
In conclusione, scegliendo le (369), (372) e (375) e risolvendo per sostituzione, abbiamo:

$$I_1 = 40\,\mathrm{mA} \tag{377}$$

$$I_2 = -30\,\mathrm{mA} \tag{378}$$

$$I_3 = 10\,\mathrm{mA}\,. \tag{379}$$

Da questa soluzione possiamo calcolarci tutte le differenze di potenziale sulle varie resistenze e le potenze dissipate. Si noti il segno negativo di $I_2$.

## 18.12

### Problemi

1. Una resistenza, collegata ad un generatore di tensione di 12 V dissipa 1000 W. Calcolare quanto vale la resistenza e la corrente che la attraversa.

2. Sul problema precedente, considerando la resistenza dei cavi, ciascuno assunto lungo 2 m, di diametro 2 mm e resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. Calcolare i nuovi valori di corrente erogata, di tensione ai capi di $R$ e di potenza dissipata dalla resistenza. Si calcoli inoltre la potenza dissipata dai cavi.

3. Una corrente di 150 mA viene ripartita da due resistenze. Sapendo che $R_2 = R_1/2$, trovare l'intensità di corrente che attraversa le due resistenze.

4. Sul problema precedente: sapendo inoltre che la tensione ai capi di $R_1$ ed $R_2$ vale 5V, trovare quanto valgono $R_1$ ed $R_2$.

5. Fare i conti numerici per risolvere il circuito del par. 18.11

6. Sul circuito risolto nel par. 18.11: assumendo che il punto C sia 'a massa' (al potenziale zero di riferimento), si determino i potenziali dei punti A, B e D (in particolare, si può arrivare a $V_A$ in tre modi diversi).

7. Risolvere il circuito del par. 18.11 usando il principio di sovrapposizione.

# 19 Venerdi 18/5, 16:00–18:00

## 19.1

Misure di grandezze elettriche con multimetro elettronico (misure eseguite in aula): resistenza, differenza di potenziale e intensità di corrente.

## 19.2

**Condensatore**: oggetto in grado di accumulare delle cariche e tale che la tensione $V$ ai suoi capi cresce linearmente con la carica accumulata $Q$ (e, ovviamente, viceversa):

$$Q = C\,V\,, \tag{380}$$

ove $C$ indica la capacità elettrica (si noti l'analogia con la capacità termica). La capacità è misurata in Farad (F, $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C}/1\,\mathrm{V}$), ma questa è una unità 'grande' e vengono usati pF ($10^{-12}$ F), nF ($10^{-9}$ F) e $\mu$F ($10^{-6}$ F).
Nota: per carica accumulata si intendono cariche positive ad un 'capo' (armatura) e carica negativa ad un altro 'capo' (l'oggetto è globalmente carico). Più precisamente, se indichiamo le armature con $A$ e $B$ e supponiamo che ci sia la carica positiva $Q$ in $A$, allora ci sarà una carica negativa in $B$ e $V_A - V_B = V > 0$, ovvero $A$ è positivo rispetto a $B$.
Applicazione: un condensatore posto in un circuito ha, ad un dato istante, una

differenza di potenziale fra i suoi capi che dipende da quanta carica ha immagazzinato sino a quel momento (con un segno che dipende da quale lato si è accumulata la carica positiva).

## 19.3

Carica/scarica condensatore, collegandolo ad un generatore di forza elettromotrice $f$ attraverso una inevitabile resistenza $R$ (il caso $f = 0$ corrisponde ad un 'corto circuito' che determina la scarica la scarica del condensatore). Dalla (374):

$$f \;=\; R\,I + V_c\,. \tag{381}$$

Utilizzando la relazione fra tensione e carica del condensatore, $V_c = Q/C$ e osservando che la variazione di carica del condensatore del tempo è pari al flusso di carica nell'unità di tempo (si immagini un flusso di acqua che riempie un recipiente), ovvero $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, possiamo scrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned} f &= R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} && (382)\\ f &= R\,C\,\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} + V_c && (383)\\ \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{R\,C}\,(f - V_c)\,, && (384) \end{aligned}$$

ottenendo un'equazione differenziale che riscriviamo per ora nella forma generale:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; \alpha\,(x_f - x)\,. \tag{385}$$

(Nel seguito vedremo altri casi fisici che portano alla stessa equazione differenziale e li risolveremo insieme una volta per tutte.)

## 19.4

Energia del condensatore.
Riprendiamo il circuito con un generatore, una resistenza e un condensatore posti in serie:

$$f \;=\; R\,I + V_C\,. \tag{386}$$

Moltiplicando per $I$ entrambo i membri:

$$I\,f = R\,I^2 + V_C\,I \tag{387}$$

$$P_G = P_J + P_C \tag{388}$$

ove abbiamo indicato con $P_G$ la potenza $f\,I$ erogata dal generatore, con $P_J$ la potenza $R\,I^2$ dissipata dalla resistenza per effetto Joule e con $P_C$ il nuovo termine $V_C\,I$, che associamo alla potenza per caricare il condensatore, e che possiamo riscrivere come

$$P_C = \frac{Q}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,. \tag{389}$$

Durante il processo di carica del condensatore il generatore fa un lavoro totale $f\,Q = C\,f^2$. Nel frattempo l'energia immagazzinata nel condensatore vale

$$E_C = \int_0^\infty P_C\,\mathrm{d}t \tag{390}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{C}\,Q\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{391}$$

$$= \int_0^{Q(t=\infty)} \frac{1}{C}\,Q'\,\mathrm{d}Q \tag{392}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,f^2\,, \tag{393}$$

ove abbiamo indicato con $Q_F$ la carica 'finale' immagazzinata nel condensatore, che possiamo chiamare genericamente $Q$.
Confrontando l'energia erogata dal generatore con quella immagazzinata nel condensatore, si evince che la resistenza ha dissipato per effetto Joule tanta energia quanta ne è stata nel condensatore (ovvero il 50% dell'energia erogata dal generatore durante il processo di carica viene dissipato in calore).

Un modo alternativo per arrivare all'espressione di $E_C$ consiste nel pensare al lavoro infinitesimo d$L$ necessario per portare una carica infinitesima d$Q$ (positiva) dall'armatura negativa a quella positica del condensatore: $\mathrm{d}L = \mathrm{d}Q\,V_C = \mathrm{d}Q\,\frac{Q}{C}$ (più è carico il condensatore e più 'costa' caricarlo). Il lavoro totale effettuato *per caricarlo* vale

$$L = \int_0^{Q_F} \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C} \tag{394}$$

e finisce in energia immagazzinata nel condensatore.

## 19.5

Caduta in campo gravitazionale con resistenza del mezzo tipo $-\beta\vec{v}$, ove $\beta$ è una costante misurata in N/(m/s), ovvero in kg/s. Caso unidimensionale con verso positivo diretto verso il basso:

$$\begin{aligned}
F_{tot} &= m\,g - \beta\,v & (395)\\
m\,a &= m\,g - \beta\,v & (396)\\
m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= m\,g - \beta\,v & (397)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \frac{\beta}{m}\,v & (398)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\beta}{m}\left(\frac{m\,g}{\beta} - v\right). & (399)
\end{aligned}$$

Dall'analisi dimensionale scopriamo che $mg/\beta$ è una velocità (in quanto deve essere omogenea con $v$ per potersi sommare algebricamente ad essa, e comunque si può ricavare facilmente dalle dimensioni di $m$ di $g$ e di $\beta$), mentre $m/\beta$ ha le dimensioni di un tempo ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ è una velocità diviso un tempo). Per comodità chiamiamo quindi $v_f = mg/\beta$ (vedremo nel seguito il motivo della '$f$' in $v_f$) e $\tau = m/\beta$, e riscriviamo l'equazione differenziale come

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\,(v_f - v)\,. \tag{400}$$

(Se invece della forza $mg$ il corpo è sottoposto alla generica forza $f$, si arriva alla stessa equazione, ove $\tau$ vale sempre $m/\beta$, mentre $v_f = f/\beta$).
Notiamo, anche in questo caso una struttura formale tipo la (385).

## 19.6

Ricordiamo che nel paragrafo 16.2 avevamo incontrato un altro fenomeno che presentava un analogo andamento temporale: processo termalizzazione, di cui riscriviamo per comodità la formula che dà la velocità di termalizzazione:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{c\,M}\,(T_f - T)\,.$$

Si riottiene la stessa struttura della (385), con $\alpha = \eta/C = \eta/cM$ e $x_f = T_f$.

## 19.7

Risolviamo la (385) per 'separazione di variabili':

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} &= -\alpha\, \mathrm{d}t && (401)\\
\int_{x_0 = x(t=0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x - x_f} &= \int_{t=0}^{t} -\alpha\, \mathrm{d}t' && (402)\\
\ln \frac{x(t) - x_f}{x_0 - x_f} &= -\alpha\, t && (403)\\
x(t) - x_f &= (x_0 - x_f)\, e^{-\alpha\, t} && (404)\\
x(t) &= x_f + (x_0 - x_f)\, e^{-\alpha\, t} && (405)\\
x(t) &= x_f + (x_0 - x_f)\, e^{-t/\tau}\,, && (406)
\end{aligned}$$

ove $\tau = 1/\alpha$, delle dimensioni di un tempo, è la *costante di tempo* del fenomeno. Quando $t = \tau$,

$$(x(\tau) - x_f) = \frac{(x_0 - x_f)}{e} \approx 0.37\, (x_0 - x_f). \qquad (407)$$

### 19.7.1

Applicazione a carica e scarica del condensatore, con $\tau = R\,C$ e $x = V_c$:

**Carica** $x_0 = 0$, $x_f = f$:

$$V_c(t) = f + (0 - f)\, e^{-t/\tau} = f\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \qquad (408)$$

**Scarica** : $x_0 = V_{c_0} = f$, $x_f = 0$:

$$V_c(t) = 0 + (f - 0)\, e^{-t/\tau} = f\, e^{-t/\tau}\,. \qquad (409)$$

### 19.7.2

Applicazione al termometro da temperatura iniziale $T_0$ a temperatura ambiente $T_A$:

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-t/\tau}\,. \qquad (410)$$

ove $\tau = C/\eta$: tanto maggiore è la capicità termica e minore la dispersione termica, quanto maggiore è $\tau$, ovvero minore è la velocità di raffreddamento/riscaldamento. Si noti come, essendo $\tau = cM/\eta$, un corpo avendo una grande massa e una piccola superficie di contatto (da cui dipende $\eta$) con l'esterno si raffredda più lentamente di un corpo che ha caratteristiche opposte. Esempi di termalizazione: thermos, laghi, Mar Mediterraneo, etc.
Valutazione empirica di $\tau$ dalla (407).

### 19.7.3

Applicazione a oggetto lasciato cadere dall'alto: $v_0 = 0$, $v_f = m\,g/\beta$ e $\tau = 1/\alpha = m/\beta$

$$v(t) \;=\; v_f\,(1 - e^{-t/\tau})\,. \tag{411}$$

Se invece il corpo avesse avuto una velocità iniziale $v_0$ avremmo avuto

$$v(t) \;=\; v_f + (v_0 - v_f)\,e^{-t/\tau}\,. \tag{412}$$

Ovviamente, lo stesso discorso vale per una qualsiasi altra forza costante $F$ e non solo per la forza di gravità $mg$. Le (395) e (399) diventano quindi

$$F_{tot} \;=\; F - mg \tag{413}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\beta}{m}\left(\frac{F}{\beta} - v\right), \tag{414}$$

ove la velocità finale vale $F/\beta$ e la costante di tempo vale sempre $m/\beta$.

### 19.7.4

Esempio del paracadutista acrobatico, il quale inizialmente, senza paracadute, raggiunge una certa velocità asintotica $v_{F_1}$ e successivamente, avendo aperto il paracadute, raggiunge la nuova velocità asintotica $v_{F_2}$, con $v_{F_2} < v_{F_1}$.
Problemino: calcolo dell'ordine di grandezza della velocità asintotica $v_{F_2}$ tale che l'impatto con il terreno non sia traumatico.

## 19.8

Altri processi descritti da equazioni differenziali simili:

A) Si assuma che la frazione di nuclei che decadono nell'unità di tempo sia $\alpha$. Si determini l'andamento del numero di nuclei nel tempo ed il tempo di dimezzamento.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \propto N \tag{415}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\alpha N\,, \tag{416}$$

ove il fattore di proporzionalità è negativo in quanto la variazione d$N$ nell'intervallo di tempo d$t$ è negativa (i nuclei diminuiscano per effetto dei decadimenti). Di nuovo, $\alpha$ ha le dimensioni di tempo$^{-1}$, e introduciamo nuovamente $\tau = 1/\alpha$. Otteniamo quindi

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \quad -\frac{N}{\tau} \tag{417}$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}\,. \tag{418}$$

Il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ è quello tale che $N(t = t_{t/2}) = N_0/2$, ovvero $t_{1/2} = \tau\, \ln 2$. Nota: i materiali più radioattivi sono quelli che hanno minore $t_{1/2}$, in quanto il numero di disintegrazioni per unità di tempo (e quindi la quantità di emissioni radioattive) va come $1/t_{1/2}$.

B) Si pensi ad una colonia di batteri. Si assuma che ad ogni istante l'incremento o decremento del numero di individui in un 'piccolo' intervallo di tempo sia proporzionale al numero di individui vivi in quell'istante. Ricavarsi la legge con cui varia la popolazione nel tempo.

C) Denaro tenuto in banca con ricapitalizzazione 'istantanea'.

## 19.9 Problemi

1. Un condensatore di $1\,\mu$F è caricato ad una differenza di potenziale di 10 V. Calcolare la carica e l'energia accumulata.

2. Una goccia d'acqua di 20 mg arriva al suolo con una velocità di 20 m/s. Calcolare il coefficiente $\beta$.

3. Sul problema precedente precedente: assumendo la goccia inizialmente in quiete, si calcoli quanto ha impiegato per raggiungere la velocità di 10 m/s.

4. Dall'espressione della velocità in funzione del tempo (411) ricavarsi l'accelerazione in funzione del tempo.

5. Dall'espressione della velocità in funzione del tempo (411) ricavarsi lo spazio percorso in funzione del tempo.

6. Sapendo che un paracadutista di 100 kg (compresa l'attrezzatura) atterra ad una velocità di 6 m/s si ricavi l'accelerazione e la forza da lui subita all'apertura del paracadute, assumendo che prima dell'apertura del paracadute scendesse a 240 km/h e che il fenomeno di apertura sia istantaneo (dalla soluzione del problema si capirà come tale assunzione non sia realistica).

7. Dalla (409) e dalla definizione $I = dQ/dt$ ricavarsi la corrente che scorre nel circuito durante il processo di scarica del condensatore e la tensione ai capi della resistenza.

8. [Continuazione del problema precedente] Ricavarsi la legge che dà la potenza istantanea $P_J(t)$ dissipata per effetto Joule sulla resistenza durante la scarica del condensatore e l'energia totale dissipata, ottenuta come $E_j = \int_0^\infty P_J(t)\,\mathrm{d}t$.

9. Un condensatore di $1\,\mu$F è caricato ad una differenza di potenziale di 10 V. Calcolare la carica e l'energia accumulata.

10. [Continuazione del problema precedente] Il condensatore viene fatto scaricare connettendolo ad una resistenza di $10\,000\,\Omega$ ($10\,\mathrm{k}\Omega$). Calcolare quanto vale carica ed energia nel condensatore dopo 5 ms (millisecondi) dall'inizio della scarica.

11. Un condensatore inizialmente a 10 V è fatto scaricare su una resistenza di $1\,\mathrm{M}\Omega$. Sapendo che la differenza di potenziale ai suoi capi impiega 35 ms per portarsi a 5 V, calcolare la capacità del condensatore.

12. Un condensatore è caricato a 10 V e successivamente viene scaricato su una resistenza da $10\,\mathrm{k}\Omega$ ($10000\ \Omega$). Si misura che dopo 11 ms ($10^{-3}$ s) la tensione si è ridotta a 5 V: Determinare la capacità del condensatore.

13. Un bicchiere di acqua di 200 g, inizialmente a $80\,^o$C, raggiunge la temperatura ambiente di $20\,^o$C. Sapendo che dopo 20 minuti la temperatura era scesa a $42\,^o$C, determinare il $\tau$ dell'andamento esponenziale di raffreddamento. Determinare anche $\eta$.

14. Un campione di materiale radioattivo (Polonio 210) contiene $3 \times 10^{12}$ nuclei instabili. Sapendo che il tempo di dimezzamento di tali nuclidi vale 138 giorni, calcolare il numero di disintegrazioni al secondo.

15. Si misura che $2.87 \times 10^{-11}$ moli di un materiale radiattivo producono circa un milione di disintegrazioni al secondo. Si determini il tempo di dimezzamento di tale materiale. (Si ricorda che il numero di oggetti per mole, ovvero la costante di Avogadro, vale $N_A \approx 6.0 \times 10^{23}\,\text{moli}^{-1}$.)

# 20 Lunedi 21/5, 16:00–18:00

## 20.1

**Oscillazioni smorzate**

Equazioni del moto di corpo soggetto a forza elastica e forza di viscosità $-\beta\vec{v}$ (caso unidimensionale):

$$
\begin{aligned}
F &= -k\,x - \beta\,v && (419)\\
m\,a &= -k\,x - \beta\,v\,, && (420)
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x &= 0 && (421)\\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x &= 0 && (422)\\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x &= 0\,, && (423)
\end{aligned}
$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, entrambe aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Il caso con $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$ si riduce all'oscillatore armonico. $\beta \neq 0$ introduce lo smorzamento, come mostrato nell'esperienza in aula (moto della molla).

## 20.2

Introduzione (empirica) all'induttanza, come elemento del circuito ai capi del quale c'è una differenza di potenziale proporzionale alla variazione nel tempo della corrente, con coefficiente di proporzionalità $L$

$$
F_L = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (424)
$$

Si può verificare che le dimensioni di $L$ sono quelle di $\Omega\cdot$ s $[L = -F_L/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) \rightarrow \mathrm{V}/(\mathrm{A}/\mathrm{s}) \rightarrow \Omega\cdot\mathrm{s}]$. La sua unità di misura è l'Henry (H): $1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega \times 1\,\mathrm{s}$.

## 20.3

Effetto nel circuito di (auto-)induttanza, con introduzione qualitativa (l'induzione magnetica vera e propria non fa parte del corso):

- Corrente $I$ che percorre una 'bobina': $\rightarrow$ campo magnetico.
  Esempio: elettromagnete, come quelli negli altoparlanti (segnale musicale $\rightarrow$ corrente $I(t)$ all'uscita dell'amplificatore $\rightarrow$ campo magnetico $B(t)$ modulato dal segnale musicale $\rightarrow$ magnete permanente immerso in $B(t)$ e solidale con la membrana dell'altoparlante $\rightarrow$ oscillazione membrana $\rightarrow$ suono).

- Se $I$ cambia con il tempo: $\rightarrow$ forza elettromotrice indotta ai capi della bobina $-\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Il segno meno ha il seguente significato: se la corrente scorre dal capo $A$ al capo $B$ dell'induttore (la bobina) e cresce (ovvero $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la forza elettromotrice indotta è tale che $V(A) < V(B)$; viceversa se la corrente diminuisce.

- La forza elettromostrice indotta è "tale da opporsi alla causa che l'ha generata": se $I$ sta scorrendo da $A$ a $B$ ed aumenta, la forza elettromotrice indotta tende a ridurla.

Siamo interessati a studiare l'effetto di $L$ sul circuito dalla sola conoscenza della (424). Ad esempio, vediamo come cambia la legge di scarica del condensatore se aggiungiamo anche una induttanza in serie a $C$ ed $R$. Scegliendo il verso positivo della corrente quello che carica il condensatore, ovvero quello per cui $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, dalla (363) abbiamo

$$\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V_L = 0 \tag{425}$$

$$-V_C - R\,I - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{426}$$

$$-\frac{Q}{C} - R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{427}$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{428}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q = 0 \tag{429}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q \;=\; 0 \qquad (430)$$

(ove $\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$), formalmente uguale alla (423) e quindi avente analoga soluzione.

## 20.4

In entrambi i casi siamo quindi interessati a risolvere la generica equazione differenziale, scritta nella generica variabile $z$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z \;=\; 0 \qquad (431)$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (428) con la (421). In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione $x(t)$, rispetto a quella di equilibrio, di punto materiale legato all'estremo di una molla. Nell'altro alla carica $Q(t)$ depositata su un'armatura del condensatore. Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica. Inoltre:

- $\beta\, v$ rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (421) si riduce ad un oscillatore armonico ideale.

- L'equivalente elettrico di $\beta$ è la resistenza $R$, la quale consuma energia per effetto Joule. Si evince quindi che un *ideale circuito* (resistenze nei circuiti, benché minime, sono inevitabili, così come inevitabili sono gli attriti nei sistemi meccanici) avente solo $C$ ed $L$ (ovvero quello che si chiama un circuito '$LC$', mentre il circuito con $R \neq 0$ si chiama genericamente '$RLC$', o '$RCL$') si comporterebbe come un oscillatore armonico nella variabile $Q(t)$, con l'energia che viene 'palleggiata' fra condensatore e induttanza, con periodo $2\pi/\omega_0$. Conosciamo bene il caso meccanico. Scriviamo le espressioni di $Q(t)$ e $I(t)$:

$$Q(t) \;=\; Q_0\,\cos(\omega_0\,t) \qquad (432)$$

$$I(t) \;=\; -Q_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t)\ : \qquad (433)$$

  – inizialmente il condensatore comincia a scaricarsi e circola una corrente negativa, inizialmente nulla e che cresce in modulo con il tempo, la quale produce un campo magnetico nella bobina;

– dopo un quarto di periodo (ovvero quando $\omega_0\, t = \pi/2$) il condensatore si è completamente scaricato e la corrente è massima in modulo (è minima, se si considera anche il segno);

– per $t$ immediatamente maggiore di $T/4$ la corrente ricarica il condensatore, ma con polarità opposta (cariche positive cominciano ad arrivare sull'armatura inizialmene negativa), la corrente decresce in modulo e per $T/2$ il condensatore è di nuovo carico, con $Q(T/2) = -Q(0)$;

– poi tutto procede a ritroso, al tempo $T$ il sistema ritorna esattamente nello stato iniziale e il moto si ripete all'infinito.

Si noti come varia l'energia del condensatore nel tempo. In particolare per $t = 0,\ \pi,\ \ldots$ è pari all'energia iniziale $1/2\, C\, V_{C_0}^2$, mentre per $t = \pi/2,\ 3/2\pi,\ \ldots$ essa è nulla: l'energia mancante è da ricercare nell'energia associata ad $L$ (energia del campo magnetico).

- $L$ è l'analogo della massa (inerziale) $m$ in quanto si oppone alla variazione di $I$.

- Infine l'analogo della costante elastica $k$ della molla è $1/C$: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ancora, così un condensatore più è carico e più è difficile caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere $\mathrm{d}Q$ è pari a $(Q/C)\,\mathrm{d}Q$]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è $C$, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più difficile è caricarlo.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \leftrightarrow Q \tag{434}$$
$$v \leftrightarrow I \tag{435}$$
$$a \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{436}$$
$$m \leftrightarrow L \tag{437}$$
$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{438}$$
$$\beta \leftrightarrow R \tag{439}$$
$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\, L\, I^2 \tag{440}$$

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,Q^2 \tag{441}$$
$$\beta\,v^2 \quad\leftrightarrow\quad R\,I^2 \tag{442}$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} \quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{443}$$

nella quale si è introdotta l'energia $1/2\,L\,I^2$ associata ad $L$.

Se $\beta$, o rispettivamente $R$, è diverso da zero, l'oscillazione è smorzata, in quanto ogni volta che la velocità, o rispettivamente la corrente, è diversa da zero viene dissipata energia con una potenza pari a $\beta\,v^2$, ovvero $R\,I^2$.

## 20.5

Per quanto riguarda la **soluzione della (431)**, ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa (la cui parte reale costituisce la soluzione fisica) del tipo

$$z(t) \;=\; k\,e^{\alpha\,t}\,, \tag{444}$$

la quale, inserita nella (431) dà luogo a

$$\alpha^2\,k\,e^{\alpha\,t} + \gamma\,\alpha\,k\,e^{\alpha\,t} + \omega^2\,k\,e^{\alpha\,t} \;=\; 0 \tag{445}$$

da cui segue l'*equazione algebrica associata*

$$\alpha^2 + \gamma\,\alpha + \omega^2 \;=\; 0 \tag{446}$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} \;=\; -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,. \tag{447}$$

Essendo sia $\alpha_1$ che $\alpha_2$ soluzione della (431), la soluzione generale è data da

$$z(t) \;=\; k_1\,e^{\alpha_1\,t} + k_2\,e^{\alpha_2\,t}\,. \tag{448}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso `sovrasmorzato'} \tag{449}$$
$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso `sottosmorzato'} \tag{450}$$
$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso `critico'}\,. \tag{451}$$

## 20.6

Soluzione dell'oscillatore smorzato, sia meccanico che elettrico, con le **condizioni iniziali**

$$z(0) = z_0 \tag{452}$$
$$\dot{z}(0) = 0\,, \tag{453}$$

ovvero: allungamento iniziale della molla e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno:

$$k_1 + k_2 = z_0 \tag{454}$$
$$\alpha_1\, k_1 + \alpha_2\, k_2 = 0 \tag{455}$$

da cui

$$k_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, z_0 \tag{456}$$
$$k_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, z_0\,. \tag{457}$$

Nota: $\alpha_1$ e $\alpha_2$ dipendono dai parametri del sistema; $K_1$ e $K_2$ dalle condizioni iniziali e dai parametri del sistema.

## 20.7 Problemi

1. La corrente alternata $I = I_0 \cos(2\pi\nu\, t)$, con $I_0 = 1\,\mathrm{A}$ e $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$, attraversa una bobina avente un'induttanza di $L = 10\,\mathrm{mH}$. Trovare quanto vale la tensione ai capi dell'induttanza.

2. Una bobina di autoinduttanza $L = 100\,\mathrm{mH}$ è attraversata da una corrente continua di $0.5\,\mathrm{A}$. Calcolare l'energia immagazzinata nella bobina.

3. Un circuito di resistenza trascurabile ha una capacità di $10\,\mathrm{nF}$ e un'induttanza di $100\,\mathrm{mH}$. Calcolare la frequenza propria del circuito.

4. Un circuito costituito da un condensatore di $50\,\mathrm{nF}$, un'induttanza di valore incognito $L$ e resistenza trascurabile: sapendo che la tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo è data da $V_C = V_{C_0} \cos\omega\, t$, con $\omega = 10^5\,\mathrm{s}^{-1}$, calcolare il valore di $L$, il massimo valore dell'intensità di corrente che fluisce nel circuito e il massimo valore della differenza di tensione ai capi di $L$.

5. Un'auto richiede una potenza di 20 CV per andare, in pianura, a 50 km/m. Calcolare la forza di attrito dell'aria, assumendo che sia proporzionale alla velocità.

# 21 Venerdi 25/5, 16:00–18:00

## 21.1

Continuiamo con la soluzione della (431).
Vediamo i due casi più interessanti (trattando, successivamente, il caso critico come caso limite di quello sottosmorzato):

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0}$ $\alpha_1$ e $\alpha_2$ valgono

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \quad (458)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \quad (459)$$

Esse sono state riscritte in modo tale da mettere in evidenza che sono entrambe negative e $\alpha_2 < \alpha_1$ (ovvero $|\alpha_1| < |\alpha_2|$). Esse hanno dimensioni inverse del tempo. È quindi opportuno introdurre le grandezze positive e aventi le dimensioni del tempo $\tau_1 = -1/\alpha_1$ e $\tau_2 = -1/\alpha_2$, con $\tau_1 > \tau_2$.

Possiamo riscrivere quindi la soluzione come

$$z(t) = k_1\, e^{\alpha_1 t} + k_2\, e^{\alpha_2 t} \quad (460)$$

$$= z_0 \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, e^{\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, e^{\alpha_2 t}\right] \quad (461)$$

$$= z_0 \left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_2}\right], \quad (462)$$

ove $k_1$ e $k_2$ sono state riscritte come $k_1 = \tau_1/(\tau_1 - \tau_2)$ e $k_2 = -\tau_2/(\tau_1 - \tau)$ al fine di mettere in evidenza $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, ed inoltre $k_1 > |k_2|$. Il fatto che i due esponenziale abbiano coefficienti di segno opposto è importante per riprodurre $\dot{z}(0) = 0$. Ma l'esponenziale con $k_2 < 0$ si estingue rapidamente e, dopo alcuni $\tau_2$, prevale l'esponenziale con $k_1 > 0$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0}$ Introducendo

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 > 0\,, \tag{463}$$

indichiamo le due soluzioni con

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1 \tag{464}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1\,, \tag{465}$$

ove $j = \sqrt{-1}$ (in genere si usa il simbolo $i$).

$k_1$ e $k_2$ valgono quindi

$$k_1 = \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1}{-2\,j\,\omega_1}\,z_0 = \frac{z_0}{2}\left(1 - j\,\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right) \tag{466}$$

$$k_2 = \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1}{2\,j\,\omega_1}\,z_0 = \frac{z_0}{2}\left(1 + j\,\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right)\,. \tag{467}$$

La soluzione è quindi

$$z(t) = \frac{z_0}{2}\left(1 - j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right)\,e^{-\gamma/2\,t}\,e^{j\,\omega_1\,t} \tag{468}$$

$$+\frac{z_0}{2}\left(1 + j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right)\,e^{-\gamma/2\,t}\,e^{-j\,\omega_1\,t} \tag{469}$$

la cui parte reale è (provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi[10] che $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$)

$$Z(t) = \mathrm{Re}\,z(t) = z_0\,e^{-t/\tau}\,\left[\cos\left(\omega_1\,t\right) + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}\,\sin\left(\omega_1\,t\right)\right] \tag{470}$$

[10]Espandendo in serie di Taylor $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{j\,x} &= 1 + j\,x - \frac{x^2}{2!} - j\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\,\frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\,. \end{aligned}$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$.

con $\tau = 2/\gamma$. [Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si può verificare inoltre[11] che la (470) può essere riscritta come

$$Z(t) \;=\; \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right), \qquad (471)$$

con $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e quindi $\cos\varphi = 1/\sqrt{1+(\gamma/2\omega_1)^2}$.

La (471), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (470), ci mostra uno moto oscillante con ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che $\omega_1 < \omega_0$, ovvero $T_1 > T_0$: lo smorzamento rallenta l'oscillazione.

Come regola pratica per ricordarsi la (471), si ricordi che essa è data, a parte un fattore, da tre componenti:

1. $z_0$, dato dall'ampiezza iniziale e che quindi costituisce la 'scala' del problema (la soluzione scala con $z_0$).
2. Un termine di attenuazione, dato da $e^{-t/\tau}$, con $\tau$ pari all'opposto dell'inverso della parte reale di $\alpha_i$ ($\tau = 2/\gamma$);
3. Un termine oscillante con una opportuna fase, ovvero $\cos(\omega_1 t+\varphi)$, con $\omega_i$ pari al modulo della parte immaginaria di $\alpha_i$.

La fase $\varphi$ ha un ruolo importante. Infatti, si può facilmente verificare che $z_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t)$ ha derivata diversa da zero a tempo zero, contraddicendo la condizione iniziale $\dot{z}(0) = 0$.[12] Ma una volta introdotta tale fase, occorre far dividere $z_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t+\varphi)$ per $\cos\varphi$, al fine di avere $z(0) = z_0$. Otteniamo quindi la (471).

[11]Con un po' di trigonometria si può vedere come $(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t+\varphi)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned}(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t+\varphi) &= \frac{1}{\cos\varphi}[\cos\omega_1 t\cdot\cos\varphi - \sin\omega_1 t\cdot\sin\varphi]\\ &= \cos\omega_1 t - \tan\varphi\cdot\sin\omega_1 t\\ &= \cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1}\,\sin\omega_1 t\,.\end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che $\cos(\arctan\alpha) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$.

[12]Si ricorda che, fisicamente, $\dot{z}(0) \neq 0$ corrisponde ad una discontinuità nella velocità o nell'intensità di corrente, a seconda che si tratti di oscillatore meccanico o elettrico, che implicherebbero forza infinita o forze elettromotrice indotta infinita.

Il valore di $\varphi$ può essere ottenuto dalla condizione $\dot{z}(0) = 0$:

$$-\frac{1}{\tau}\cos\varphi - \omega_1 \sin\varphi \quad = \quad 0 \tag{472}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\varphi \quad = \quad -\frac{\gamma}{2\omega 1}, \tag{473}$$

da cui $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2}$.

## 21.2

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0}$ Questa condizione si ottiene come limite per $\omega_1 \to 0$. Il procedimento più rapido[13] è a partire dal caso sottosmorzato, ed in particolare

[13] Alternativamente si può anche partire dal caso sovrasmorzato, ed in particolare dalla (461). Indicando $\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$ con $\epsilon$, otteniamo che $\alpha_1 = -\gamma/2 + \epsilon$ e $\alpha_2 = -\gamma/2 - \epsilon$, da cui $\alpha_2 = \alpha_1 - 2\epsilon$. Si tratta quindi di fare il limite della (461) per $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{z(t)}{z_0} &= \frac{\alpha_1 - 2\epsilon}{-2\epsilon} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{-2\epsilon} e^{(\alpha_1 - 2\epsilon)\,t} && (474)\\
&= \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon}\left[-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1 e^{-2\epsilon\,t}\right] && (475)\\
&\approx \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon}\left[-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1(1 - 2\epsilon\,t)\right] && (476)\\
&\approx e^{\alpha_1 t}\left[1 - \alpha_1 t\right] && (477)\\
&\to e^{-(\gamma/2)t}\left[1 - \frac{\gamma}{2}t\right] = e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) && (478)
\end{aligned}$$

dalla (470). Sviluppando in serie, otteniamo[14] otteniamo:

$$Z(t) \approx z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{(\omega_1\, t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}(\omega_1\, t)\right], \tag{479}$$

che, per $\omega_1 \to 0$, diventa

$$\begin{aligned} Z(t) &= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{\gamma}{2}\, t\right] && (480)\\ &= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right]. && (481) \end{aligned}$$

[Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si noti come $Z(t)$ è il prodotto di fattori non negativi e quindi è sempre $\geq 0$, ovvero non si ha alcuna oscillazione intorno allo zero.

## 21.3

Come esercizio, mostriamo come la (481) soddisfi l'equazione differenziale da cui siamo partiti.

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= -\frac{z_0}{\tau^2}\, t\, e^{-t/\tau} && (482)\\ \ddot{Z}(t) &= \frac{z_0}{\tau^2}\, e^{-t/\tau} \left(\frac{t}{\tau} - 1\right). && (483) \end{aligned}$$

[Quest'ultima ci dice che $Z(t)$ ha un flesso per $t = \tau$.]

[14] Si ricorda che per $\epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \sin\epsilon &\approx \epsilon \\ \cos\epsilon &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Altre utili approssimazioni

$$\begin{aligned} e^{\epsilon} &\approx 1 + \epsilon \\ (1+\epsilon)^2 &\approx 1 + 2\,\epsilon \\ \sqrt{(1+\epsilon)} &\approx 1 + \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{1+\epsilon} &\approx 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\ddot{Z}(t) + \gamma \dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) \quad = \tag{484}$$

$$\frac{t}{\tau} - 1 - \gamma t + \tau^2 \omega_0^2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \quad = \quad 0\,, \tag{485}$$

ricordandoci che $\tau = 2/\gamma$ e $\tau^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2/\gamma^2 = 1$ in quanto nel caso critico vale la relazione $\gamma/2 = \omega_0$.

## 21.4

**Oscillatore smorzato: considerazioni energetiche.**
Riprendiamo oscillatore smorzato, caso sottosmorzato, di cui riscriviamo la soluzione nella forma (471)

$$Z(t) \quad = \quad \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right) \tag{486}$$

e ci ricordiamo che a seconda dei problemi incontrati $Z$ ha il significato dello scostamento $x$ rispetto alla posizione di equilibrio o di carica $Q$. Concentriamoci sul caso meccanico (quello elettrico è assolutamente equivalente), ovvero

$$x(t) \quad = \quad \frac{x_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right). \tag{487}$$

Energia meccanica all'istante $t = 0$ e dopo $n$ pseudoperiodi, nell'approssimazioni che l'oscillatore sia poco smorzato e quindi $\omega_1 \approx \omega_0$ (ovvero $\gamma^2/4 \ll \omega_0$ ):

$$E_0 = E(n=0) \quad = \quad \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 \tag{488}$$

$$E(n) \quad = \quad \frac{1}{2}\, k\, x^2(t = nT_1) \tag{489}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\, k\, x_0^2\, e^{-2\, n\, T_1/\tau} \tag{490}$$

$$= \quad E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega_1)\, n} \tag{491}$$

$$\approx \quad E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega 0)\, n}\,. \tag{492}$$

Il rapporto fra $E(n+1)/E(n)$ da un periodo all'altro vale

$$\frac{E(n+1)}{E(n)} \quad \approx \quad e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}\,, \tag{493}$$

ovvero in un periodo abbiamo una variazione frazionaria di

$$\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} \approx e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)} - 1 \tag{494}$$

$$\approx 1 - \frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0} - 1 \tag{495}$$

$$\approx -\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}\,, \tag{496}$$

ove abbiamo usato nel penultimo passaggio l'approssimazione $e^{-\epsilon} \approx 1-\epsilon$, in quanto $\gamma/\omega_0 \ll 1$
Inoltre, possiamo riscrivere la (492) come

$$E(n) \approx E_0\, e^{-n/n_c} \tag{497}$$

$$(\, n_c = \frac{1}{2\,\pi}\frac{\omega_0}{\gamma}\,)\,. \tag{498}$$

ove $n_c$ acquista il significato di 'numero di oscillazioni che l'oscillatore impiega per ridurre ad $1/e$ la sua energia iniziale: $\rightarrow$ altro andamento esponenziale!
Ovviamente, essendo il numero di periodi proporzionale al tempo trascorso, in quanto $t = n\,T = n\,(2\pi/\omega_0)$, e considerando l'andamento 'medio' dell'energia, valido ad ogni numero intero di periodi (l'andamento esatto è un po' più complicato, in quanto la variazione dell'energia nell'unità di tempo è proporzionale al quadrato della velocità istantanea), otteniamo

$$< E(t) > \approx E_0\, e^{-\gamma\, t} = E_0\, e^{-t/\tau_E}\,, \tag{499}$$

con $\tau_E = 1/\gamma$: l'andamento medio dell'energia nel tempo è esponenziale, con una costante di tempo inversamente proporzionale al coefficiente di viscosità $\beta$ (o l'equivalente elettrico $R$ nel circuito $RLC$).
**Fattore di qualità** (o di merito) di un circuito smorzato. Definizione:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}\,. \tag{500}$$

(<u>Da non confondere</u> con il simbolo della carica elettrica). Possiamo riscrivere le (496) e (498) come

$$\frac{E(n+1)-E(n)}{E(n)} \approx -\frac{2\,\pi}{Q} \tag{501}$$

$$n_c \approx \frac{Q}{2\,\pi}, \tag{502}$$

ovvero

- maggiore è il fattore di merito e minore è l'energia frazionaria persa per ogni oscillazione e, di conseguenza, maggiore il numero di oscillazioni prima che il sistema abbia perso una certa frazione prefissata di energia;

- in particolare, la (502) ci dice che $Q/2\pi$ rappresenta (approssimativamente) il numero di oscillazioni necessarie affinchè l'energia del sistema si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

In termini dei parametri del sistema $Q$ vale:

$$\text{Oscillatore meccanico:} \qquad Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{m\,k} \tag{503}$$

$$\text{Oscillatore elettrico:} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{504}$$

## 21.5

Cenni sull'andamento esatto di $E(t)$.

- Gli andamenti esponenziali dell'energia del sistema oscillante sono solo andamenti medi. Per avere l'andamento esatto è sufficiente sommare, istante per istante, l'energia legata al termine di richiamo (molla/condensatore) e quella legata al termine inerziale (massa/induttanza):

$$\text{Oscillatore meccanico:} \qquad E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) \tag{505}$$

$$\text{Oscillatore elettrico:} \qquad E(t) = \frac{1}{2C}Q^2(t) + \frac{1}{2}LI^2(t)\,. \tag{506}$$

- Alternativamente, si può pensare alla potenza dissipata, $P(t) = -\beta v^2(2)$ o $P(t) = -RI^2(2)$, ovvero $P(t) \propto \dot{z}^2(t)$. La potenza dissipata è (pseudo-)ciclica: si annulla ad ogni multiplo di $T_1/2$, ovvero quando il sistema ha 'velocità' nulla; è massima ogni qual volta l'energia è 'puramente inerziale'.

## 21.6

Per vedere alcuni grafici sull'argomento fatti con gnuplot (scripts scaricabili), vedi `http://www.roma1.infn.it/~dagos/LEC_03-04/gnuplot/`.

## 21.7 Problemi

1. Un corpo di 800 g, legato all'estremità di una molla, è anche soggetto a una forza di viscosità del tipo $-\beta\, v$. Sapendo che l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta di $1/e$ in 5 minuti, trovare il coefficiente $\beta$.

2. Un corpo di 1 kg è legato all'estremo di una molla di costante elastica $k = 45\,\mathrm{N/m}$. Calcolare il massimo coefficiente di viscosità $\beta$ affinché affinché le oscillazioni siano sottosmorzare.

3. Un corpo, sospeso ad una molla oscilla senza attriti con un periodo di 0.5 secondi. Successivamente, posto in un mezzo viscoso, esso oscilla con pseudoperiodo di 0.513 secondi. Calcolare il rapporto fra coefficiente di viscosità e la massa del corpo.

4. Un condensatore di 5 nF, inizialmente a 10 V, viene fatto scaricare su una resistenza di 150 Ω e un'induttanza di 10 mH posti in serie. Calcolare lo pseudoperiodo dell'oscillazione smorzata.

5. Sul problema precedente: calcolare la tensione ai capi del condensatore dopo la prima oscillazione (ovvero dopo uno pseudoperiodo dall'inizio della scarica).

6. Ancora sul problema precedente: calcolare l'energia persa dal sistema durante la prima oscillazione.

7. Un sistema meccanico è caratterizzato da $\beta = 1\,\mathrm{kg/s}$ e da $\omega_0 = \gamma/2 = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Determinare a quale istante, a partire da quando il corpo è rilasciato a velocità nulla dalla massima deviazione dal punto di equilibrio, è massima la potenza dissipata per attrito di viscosità e il valore di tale potenza.

# 22 Lunedi 28/5, 16:00–18:00

## 22.1

Corpi estesi: possono traslare (moto del baricentro) e ruotare. Definizione di corpo rigido.
Forze possono cambiare stato di rotazione.
Esempio guida: corpo (es. ruota) girevole intorno ad asse fisso: → eventuali forze possono al più mettere in rotazione il corpo, ma non spostarlo nel suo insieme.

Osservazioni qualitative: le forze radiali 'non hanno effetto'; soltanto quelle 'trasversali' producono rotazione o cambiano lo stato di rotazione. In generale, quello che contano sono solo le componenti delle forze trasverse a quelle radiali: $|F_{T_i}| = |vecF_i| \cdot |\sin\theta|$, ove $\theta$ è l'angolo fra la forza —$vecF_i$ e il vettore fra l'asse di rotazione ed il punto di applicazione della forza. Inoltre, al seconda del segno di $\sin\theta$ cambia il verso di rotazione che la forza $\vec{F_i}$, da sola, causerebbe al corpo.

Ragionamenti energetici. Supponiamo, per cominciare, di avere una ruota 'rigida e senza massa' (ovvero di massa trascurabile rispetto ad altre masse che considereremo) alla quale è applicata alla distanza $r_i$ dall'asse una forza *giacente sul piano della ruota* la cui componente trasversale vale $|F_{T_i}|$ e diretta in modo tale da causare rotazione antioraria. Supponiamo anche che sulla ruota ci sia la massa $m_j$ a distanza $r_j$ dall'asse e che, la ruota possa essere anche in rotazione, con velocità angolare $\omega$. Bilanvio energetico:

- lavoro della forza $\vec{F_i}$ (indicato con $W$ — work — in quanto $L$ ci servirà per una nuova grandezza):

$$\mathrm{d}W^{(i)} = F_{T_i}\,\mathrm{d}s_i = F_{T_i}\,r_i\,\mathrm{d}\theta_i\,; \tag{507}$$

- variazione di energia cinetica:

$$\mathrm{d}E_c^{(j)} = m_j\,v_j\,\mathrm{d}v_j = m_j\,(r_j\omega)\,(r_j\mathrm{d}\omega) \tag{508}$$

Essendo $\mathrm{d}W^{(i)} = \mathrm{d}E_c^{(j)}$, otteniamo

$$\begin{aligned} F_{T_i}\,r_i\,\mathrm{d}\theta_i &= m_j\,(r_j\omega)\,(r_j\mathrm{d}\omega) && (509)\\ F_{T_i}\,r_i\,\omega\mathrm{d}t &= m_j\,r_j^2\omega\,\dot\omega\,\mathrm{d}t && (510)\\ F_{T_i}\,r_i &= \left(m_j\,r_j^2\right)\,\dot\omega\,. && (511)\end{aligned}$$

Nel caso di tante forze e tante masse, otteniamo

$$\left(\sum_i F_{T_i}\,r_i\right) = \left(\sum_j m_j\,r_j^2\right)\,\dot\omega\,, \tag{512}$$

ovvero

$$\dot\omega = \frac{\sum_i F_{T_i}\,r_i}{\sum_j m_j\,r_j^2}\,. \tag{513}$$

Come era da attendersi, l'accelerazione angolare dipende dalle forze e dalle masse, ma in un modo più complicato rispetto all'*analoga* '$F = ma$':

- il contributo di ciascuna forza alla variezione dello stato di rotazione non soltanto dipende dalla sola componente trasversa alla retta fra il punto di applicazione e l'asse di rotazione, ma dipende anche dalla distanza del punto di applicazione della forza da tale asse.
- il contributo di ciascuna massa all'inerzia rispetto alle rotazioni non dipende soltanto dalla massa, ma anche dalla loro distanza — al quadrato! — rispetto all'asse di rotazione.

I contributi alla sommatoria $\sum_i F_{T_i}\, r_i$ sono positivi o negativi a seconda che essi provochino, individualmente, rotazioni antiorarie o orarie. Questo può essere messo in evidenza scrivendo $F_{T_i}$ come $|\vec{F}_i| \sin\theta$, ove l'angolo $\theta$ è preso *a partire dalla direzione (e verso positivo) del vettore* $\vec{r}_i$ diretto dal centro di rotazione al punto di applicazione della forza $\vec{F}_i$ [per intenderci: se $\vec{r}_i$ è orientato nel verso positivo dell'asse $x$ e $\vec{F}_i$ forma, ad esempio, un angolo di $+45$ gradi rispetto a tale asse, il seno è positivo (e la rotazione causata soltanto da forza sarebbe antioraria); se l'angolo fosse invece di $-45$ il seno sarebbe negativo e la rotazione oraria]. Possiamo quindi riscrivere la (513) come

$$\dot{\omega} = \frac{\sum_i |\vec{F}_i|\, |\vec{r}_i|\, \sin\theta_i}{\sum_j m_j\, r_j^2}\,, \tag{514}$$

ovvero

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I}\,, \tag{515}$$

avendo definito:

$$M = \sum_i |\vec{F}_i|\, |\vec{r}_i|\, \sin\theta_i \tag{516}$$

$$I = \sum_j m_j\, r_j^2 \tag{517}$$

$M$ è la risultante dei *momenti delle forze* $M_i = |\vec{F}_i|\, |\vec{r}_i|\, \sin\theta_i$ e $I$ è il *momento di inerzia*. [**Nota** per ora $M$ è semplicemente uno scalare in quanto stiamo considerando forze giacenti sul piano della ruota, i loro unico effetto, rispetto alle rotazioni, è quello di produrre rotazioni intorno all'asse della ruota. Il caso in cui il corpo può ruotare in ogni direzione è più complicato.]

Riscriviamo la (515) in modo analogo a '$F = m\,a$' e, assumendo $I$ costante, introduciamo l'equivalente la nuova grandezza $L$:

$$
\begin{aligned}
M &= I\dot{\omega} && (518)\\
&= I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} && (519)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\omega) && (520)\\
&= \frac{\mathrm{d}L\omega}{\mathrm{d}t} && (521)
\end{aligned}
$$

con $L = I\,omega$. La (521) è quindi analoga di '$F = \mathrm{p}/\mathrm{d}t$'. $L$ è chiamato *momento della quantità di moto.*

## 22.2

Approfondiamo l'analogia fra movimenti unidimensionali e rotazione di corpo rigido intorno ad un asse:

$$
\begin{aligned}
x &\longleftrightarrow \theta && (522)\\
v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &\longleftrightarrow \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} && (523)\\
a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} &\longleftrightarrow \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} && (524)\\
m &\longleftrightarrow I && (525)\\
p = mv &\longleftrightarrow L = I\omega && (526)\\
F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ma &\longleftrightarrow M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\dot{\omega} && (527)\\
\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x &\longleftrightarrow \mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta && (528)\\
(W\text{: lavoro}) & && (529)\\
P = F\,v &\longleftrightarrow M\,\omega && (530)\\
E_c^{(trasl)} = \frac{1}{2}mv^2 &\longleftrightarrow E_c^{(rot)} = \frac{1}{2}I\omega^2 && (531)\\
F^{(ext)} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; p_{tot} = cost &\longleftrightarrow M^{(ext)} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; L_{tot} = cost && (532)
\end{aligned}
$$

Esempi di applicazione della conservazione della quantità di moto totale in assenza di forze esterne: $I$ può cambiare ridistribuendo le masse. Se tale redistribuzione viene effettuata da forze interne, la conservazione di $L$ si traduce in

$$I_1\,\omega_1 \;=\; I_2\,\omega_2\;: \qquad (533)$$

è quindi possibile cambiare la velocità angolare avvicinando o allontanando le masse rispetto all'asse di rotazione: tuffatori, pattinatori e ballerine sfruttano tale principio.

## 22.3

**Energia cinetica totale**

$$E_c^{tot} = E_c^{trasl} + E_c^{rot} = \frac{1}{2} m_{tot} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \,. \tag{534}$$

Esempio di applicazione: confronto fra moto su piano inclinato di un corpo che può solo scivolare senza attrito rispetto corpo che rotola (si ricorda che, per rotolare, è richiesto attrito statico in quanto, istante per istante, la superficie di contatto con il piano ha velocità nulla, ovvero non scivola).

## 22.4

Introduzione al prodotto vettoriale.

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \tag{535}$$

ove il simbolo "$\wedge$" (anche indicato con "$\times$") indica il *prodotto vettoriale* (a differenza del prodotto scalare, il risultato è un vettore).
Proprietà del prodotto vettoriale.

- $\vec{c}$ è ortogonale sia ad $\vec{a}$ che a $\vec{b}$, e quindi ortogonale al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
- il modulo di $\vec{c}$ è dato dal prodotto dei moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per il seno dell'angolo fra loro compreso:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\theta| \,; \tag{536}$$

- il verso è tale che, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono diretti rispettivamente lungo i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ (ovvero $\hat{i}$ e $\hat{j}$), $\vec{c}$ è diretto lungo $\hat{z}$ (ovvero $\hat{k}$);
- regola della mano destra: con palmo aperto puntare le dita longo $\vec{a}$; piegarle verso $\vec{b}$ seguendo l'angolo minore; $\vec{c}$ è diretto lungo il pollice;[15]

[15] In altre parole, se disegniamo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ su un foglio (due vettori sono sempre coplanari), e per andare da $\vec{a}$ a $\vec{b}$ seconda l'angolo più breve eseguiamo una rotazione antioraria, allora $\vec{c}$ è uscente dal foglio.

- il prodotto vettoriale anticommuta: $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (quindi bisogna fare attenzione all'ordine di $\vec{v}$ e $\vec{B}$ nell'espressione della forza).

## 22.5 Problemi

1. Uno scooter ha una 'coppia' massima (ovvero massimo momento della forza) di $14\,\mathrm{N{\cdot}m}$ a 7000 giri al minuto. Calcolare la potenza dello scooter a tale regime del motore.

2. Uno scooter ha una potenza massima di 11.8 HP a 8500 giri/min. calcolare la coppia a tale regime del motore.

3. Un corpo in rotazione intorno al proprio asse a 1000 giri al minuto ha una energia cinetica di rotazione pari a 1000 J. Calcolare il momento di inerzia del corpo.

4. Una ruota di raggio $R = 30\,\mathrm{cm}$ e massa pari ad 1 kg è posta in rotazione il proprio asse ad una velocità tale che la ruota, lasciata libera al suolo, andrebbe ad una velocità di 40 km/h. Immaginando che tutta la massa della ruota sia concentrata a distanza $R$, calcolare l'energia cinetica della ruota.

5. Un corpo in rotazione intorno al proprio asse subisce un dimezzamento del momento di inerzia. Calcolare la variazione di velocità angolare.

6. Una barretta lunga 1 m, con agli estremi due masse di 1 kg ciascuna, ruota con una velocità angolare di $100\,\mathrm{s}^{-1}$. Improvvisamente le due masse sono avvicinate finché la loro distanza si dimezza. Calcolare la variazione di velocità angolare e la variazione di energia.

7. Un corpo ruota ad una velocità angolare di $10\,\mathrm{s}^{-1}$. Ad un certo istante il corpo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Trovare la velocità angolare finale.

8. Un corpo libero di ruotare intorno al proprio asse e inizialmente fermo è soggetto ad un'accelerazione angolare di $1\,\mathrm{s}^{-2}$ che dura 10 secondi. Calcolare la velocità angolare finale e la rotazione totale del corpo (sia in radianti che in gradi).

# 23 Venerdi 1/6, 16:00–18:00

## 23.1

Ruota con asse fisso messa in rotazione da una forza giacente nel piano della ruota: la somma delle forze nel piano deve essere nulla, altrimenti subirebbe un'accelerazione che farebbe muovere la ruota nel suo insieme. Chiamando $\vec{F}_R$ la forza di reazione vincolare, $\vec{F}+\vec{F}_R = 0$, ovvero $\vec{F}_R = -\vec{F}$. Diversi esempi di forza $\vec{F}$ applicata in un punto $A$ tale che il vettore fra il centro di rotazione e $A$ sia $\vec{r}$: angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{F}$ di 0, 90 o 45 gradi: per quanto abbiamo visto, cambia il momento della forza, ovvero la capacità della forza di cambiare lo stato di ruotazione cel corpo. Analisi di $\vec{F}$ e $\vec{F}_R$ nei diversi casi: $\vec{F} + \vec{F}_R$ vale sempre zero, ma:

- nel caso di 0 gradi i 'vettori applicati' $\vec{F}$ e $\vec{F}_R$ sono sulla stessa retta;
- nel caso di 90 gradi essi sono su due rette distanti $|\vec{r}|$;
- nel caso generale, dato un angolo $\theta$ fra $\vec{r}$ e $\vec{F}$, le rette per i vettori applicati i 'vettori applicati' $\vec{F}$ e $\vec{F}_R$ distano di $|\sin theta|$.

Reinterpretazione della $|M| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot |sin\theta|$:

$$|M| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot |\sin\theta| \quad (537)$$
$$= |\vec{r}| \cdot (|\vec{F}| \cdot |\sin\theta|) = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_T| \quad (538)$$
$$= (|\vec{r}| \cdot \sin\theta|) \cdot |\vec{F}| = b \cdot |\vec{F}|. \quad (539)$$

Il momento della forza può essere reinterpretato come prodotto della forza per il *braccio* $b$ della **coppia** delle forze. Questa riscrittura mette in luce il fatto che una sola forza non è sufficiente a mettere in rotazione un corpo rigido, ma lo farebbe semplicemente traslare.

## 23.2

Calcolo del momento di inerzia per alcuni casi semplici:

- barra 'senza peso' di lunghezza $l$ con masse $m_A$ e $m_B$ poste agli astremi $A$ e $B$: $I_A = m_B l^2$; $I_B = m_A l^2$; $I_C = m_A(l/2)^2 + m_B(l/2)^2$, ove '$C$' sta per il centro della barra.
- ruota con tutta la massa considerata alla distenza $R$: $I = mR^2$.

Caso continuo: ciascun elemento di massa d$m$ contribuisce con d$I = r^2$d$m$ al momento di inerzia. La sommatoria $\sum_i m_i r_i^2$ viene sostituita dall'integrale $\int_{\{V\}}$ d$I$: Calcolo del momento di inerzia di un disco rigido 'sommando' i contributi degli infiniti anelli concentrici di spessore infinitesimo d$r$ posti a distanza $r$. Siccome ogni anello 'rettificato' è visto come un parallelepipedo di lati $2\pi r$ ('circonferenza rettificata'), d$r$ e $h$ (lo spessore del disco): d$m = \rho \cdot 2\pi r h$d$r$, con $\rho$ la densità, ovvero d$m = 2\pi\rho h r$d$r$.

- Massa del disco

$$\int_0^R \mathrm{d}m = \int_0^R 2\pi\rho h r \mathrm{d}r = \rho\, \pi R^2\, h \tag{540}$$

(densità $\times$ superficie $\times$ spessore).

- Momento di inerzia dell'anello a distanza $r$:

$$\mathrm{d}I = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r\,. \tag{541}$$

Momento di inerzia dell'intero disco

$$I = \int_0^R \mathrm{d}I = \int_0^R 2\pi\rho h r^3 \mathrm{d}r \tag{542}$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}\, M R^2\,. \tag{543}$$

[Esercizietto extra: calcolare l'area di un cerchio di raggio R, considerando le aree degli infiniti anelli concentrici che lo costituiscono:

$$\mathrm{d}A = 2\pi r\, \mathrm{d}r \tag{544}$$

$$A = \int_0^R \mathrm{d}A = \int_0^R 2\pi r\, \mathrm{d}r = \pi\, R^2\,.] \tag{545}$$

## 23.3

Riprendiamo ruota girevole su asse $z$ e consideriamo, di nuovo, forza nel piano $xy$, ovvero $F = \{F_x, F_y\}$ applicata in $\vec{r} = \{x, y\}$.

- Effetto della sola componente $F_y$: per definizione $F_y$ è ortogonale a $x$ e quindi $M^{(F_y)} = xF_y$, ove $M^{(F_y)}$ sta per contributo ad $M$ dovuto a $F_y$. Chiaramente, se $F_y > 0$ e $x > 0$ allora $M^{(F_y)}$ è positivo e causa una rotazione antioraria. Idem se $F_y < 0$ e $x < 0$ (provare a fare un disegno). Se, invece il prodotto $xF_y$ è negativo la rotazione è oraria.

- Effetto della sola componente $F_x$: se $y > 0$ e $F_x > 0$, $F_x$ tende a far girare la ruota in verso orario (etc. per gli altri casi).

- Quindi, per tener conto dei contributi di entrambe componenti, occorre sommare $-yF_x$ a $xF_y$:

$$M = x\,F_y - y\,F_x\,. \tag{546}$$

- È facile dimostrare che $M$ costruito in questo modo è esattamente uguale a quello definito come $|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\sin\theta$. In particolare, per quanto riguarda il valore assoluto, $(x\,F_y - y\,F_x)^2 = |\vec{r}|^2\cdot|\vec{F}|^2\sin^2\theta$. Infatti

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta && (547)\\
&= 1-\frac{(xF_x+yF_y)^2}{(x^2+y^2)\cdot(F_x^2+F_y^2)} && (548)\\
&= \frac{x^2F_y^2+y^2F_x^2-2xyF_xF_y}{(x^2+y^2)\cdot(F_x^2+F_y^2)} && (549)\\
&= \frac{(x\,F_y-y\,F_x)^2}{|\vec{r}|^2\cdot|\vec{F}|^2}\,. && (550)
\end{aligned}$$

## 23.4

In generale, se $\vec{F} = \{F_x,\,F_y,\,F_z\}$ e $\vec{r} = \{x,\,y,\,z\}$, possiamo fare un'analoga analisi delle forze sui piani $yz$ e $zx$, responsabili, rispettivamente, delle rotazioni sull'asse $x$ e $y$. A questo punto diventa di cruciale importanza considerare la *natura vettoriale del momento della forza.* La componente $M_z$ è dovuta alle (componenti delle) forze nel piano $xy$. La componente $M_x$ è dovuta alle (componenti delle) forze nel piano $yz$, e ciclicamente per $M_y$. In definitiva, abbiamo

$$\vec{M} = (yF_z - zF_y)\,\hat{\imath} + (zF_x - xF_z)\,\hat{\jmath} + (xF_x + yF_y)\,\hat{k}\,. \tag{551}$$

È possibile dimostrare facilmente che $\vec{M}$ definito in questo modo è uguale al prodotto vettoriale $\vec{r}\wedge\vec{F}$. Infatti, in particolare,

- $\vec{M}$ è ortogonale sia a $\vec{r}$ che a $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\cdot\vec{M} &= x\cdot(yF_z - zF_y) + y\cdot(zF_x - xF_z) + z\cdot(xF_x + yF_y) = 0\\
\vec{F}\cdot\vec{M} &= F_x\cdot(yF_z - zF_y) + F_y\cdot(zF_x - xF_z) + F_z\cdot(xF_x + yF_y) = 0\,.
\end{aligned}$$

  (Il dettaglio dei conti viene lasciato come esercizio).

- Il modulo di $\vec{M}$ è pari a $|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\theta$. Infatti

$$\begin{aligned}
M^2 &= (yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_x + yF_y)^2 && (552)\\
\sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{(xF_x + yF_y + zF_z)^2}{(x^2+y^2+z^2)\cdot(F_x^2+F_y^2+F_z^2)} && (553)\\
&= \frac{(x^2+y^2+z^2)\cdot(F_x^2+F_y^2+F_z^2) - (xF_x + yF_y + zF_z)^2)}{(x^2+y^2+z^2)\cdot(F_x^2+F_y^2+F_z^2)}\\
&= \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&= \frac{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_x + yF_y)^2}{|\vec{r}|^2\cdot|\vec{F}|^2}\,. && (554)
\end{aligned}$$

(Conti lasciati come esercizio.)

La (551) ci permette di scrivere in modo compatto il prodotto vettoriale $\vec{M} = \vec{r}\wedge\vec{F}$ dalle componenti di $\vec{r}$ e $\vec{F}$ come il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \qquad (555)$$

Il fatto che vettori paralleli abbiano prodotto vettoriale nullo e la regola anticommutativa del prodotto vettoriale seguono dalle proprietà dei determinanti (rispettivamente righe uguale a meno di un fattore moltiplicativo e scambio di due righe). Quindi, in generale, il modo per calcolare $\vec{a}\wedge\vec{b}$ dalle componenti è

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (556)$$

ovvero

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\cdot\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\cdot\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_z)\cdot\hat{k}\,. \qquad (557)$$

## 23.5

Derivata del prodotto vettoriale: dalla scrittura in termini delle componenti è facile dimostrare che, dato $\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{b}$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{c}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{a}\wedge\vec{b}) && (558)\\
&= \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}\,, && (559)
\end{aligned}$$

ovvero vale una regola analoga alla derivata del prodotto. Per dimostrare questa proprietà, è sufficiente partire dalla $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_z) \cdot \hat{k}$. Otteniamo infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\vec{a} \wedge \vec{b} &= \left( \frac{da_y}{dt} b_z + a_y \frac{db_z}{dt} - \frac{da_z}{dt} b_y - b_y \frac{db_y}{dt} \right) \hat{\imath} \\ &\quad + (\,\ldots\,)\,\hat{\jmath} \;+\; (\,\ldots\,)\,\hat{k} &\quad (560) \\ &= \left( \frac{da_y}{dt} b_z - \frac{da_z}{dt} b_y \right) \hat{\imath} + \left( a_y \frac{db_z}{dt} - b_y \frac{db_y}{dt} \right) \hat{\imath} \\ &\quad + (\,\ldots\,)\,\hat{\jmath} + (\,\ldots\,)\,\hat{\jmath} + (\,\ldots\,)\,\hat{k} + (\,\ldots\,)\,\hat{k} &\quad (561) \\ &= \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \left( \frac{d\vec{b}}{dt} \right). &\quad (562) \end{aligned}$$

## 23.6

Approccio formale a momento della quantità di moto e momento delle forze ("dicesi…"):

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (563)$$

(Nota: il concetto di 'momento' è applicabile, in principio, a qualsiasi vettore e va riferito rispetto ad un punto ('polo'): "momento del vettore forza rispetto all'origine", etc.)

Momento della quantità di moto:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \wedge \vec{p} &\quad (564) \\ &= \vec{r} \wedge \vec{(m\,\vec{v})} &\quad (565) \end{aligned}$$

Derivando otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} &\quad (566) \\ &= \vec{v} \wedge (m\vec{v}) + \vec{r} \wedge \vec{F} &\quad (567) \\ &= 0 + \vec{r} \wedge \vec{F} &\quad (568) \\ &= \vec{M}\,. &\quad (569) \end{aligned}$$

[$\vec{v} \wedge (m\vec{v})$ è nullo in quanto, in generale, $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$.]

Otteniamo, ora in forma vettoriale, l'analoga di $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{570}$$

da cui $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t$, ovvero $\vec{L}$ varia nell'unità di tempo lungo la direzione di $\vec{M}$:

$$\vec{L}(t + \mathrm{d}t) = \vec{L}(t) + \vec{M}\,\mathrm{d}t\,. \tag{571}$$

**Esperimento in aula** con 'giroscopio' (ruota con 'camera di piombo' invece che d'aria per aumentare inerzia): visualizzazione di $\vec{L}$, $\vec{M}$ e $\mathrm{d}\vec{L}$. Commenti su bici etc.

Alcune applicazioni automobilistiche e motociclistiche basate sui momenti delle forze.

- Rotazione dei veicoli durante accelerazioni e frenate (ricordare che, per il principio di azione-reazione le forze esterne, trascurando l'attrico con l'aria, sono applicate nei punti di contatto con la strada): in accelerazione impennano e in franata si 'impuntano', indipendentemente dal tipo di trazione. Ne segue che in accelerazione aumenta l'aderenza delle ruote posteriori e diminuisce quella delle anteriori, viceversa in frenata. Per questo motivo, dal vista la trazione posteriore è più efficiente per spingere la macchina (lo slittamento delle ruote avviene ad accelerazioni superiori), mentre i freni anteriori sono più efficienti per fermarla.

- Forma peculiare dei 'dragster': per evitare che un veicolo si impenni si deve aumentare il momento di inerzia rispetto all'asse trasverso alla direzione del moto. Allungare il veicolo permette di aumentare il momento di inerzia senza aumentare considerevolmente la massa (la quale invece si oppone, comunque, alle accelerazioni di traslazione, che non si voglioni ridurre).

- Vantaggio, dal punto di vista di stabilità di un veicolo a trazioen anteriore: Se il veicolo è 'tirato' e per qualche motivo le ruote posteriori perdono aderenza e il veicolo ruota leggermente, la coppia fra forza che tira e quella che trattiene tende a raddrizzare il veicolo (provare a verificare con un disegno). Nel caso invece in cui lono le ruote posteriori a spingere e sono le ruote anteriori a perdere aderenza e far ruotare il veicolo, la coppia delle forze tende ad aumentare la rotazione: $\rightarrow$ testacoda. [Non c'è bisogno di guidare un veicolo a trazione posteriore per convincersi. È sufficiente provare a spingere o tirare un carrello al supermercato, specie quando ne capita uno con le ruote che tendono a impuntarsi.]

## 23.7

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido (da una condizione iniziale $\vec{v}_{CM} = 0$ e $\omega = 0$): devono essere nulla sia la risultante delle forze esterne che la risultante dei momenti delle forze:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(ext)} = 0 \\ \vec{M}^{(ext)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \text{cost} \\ \vec{L} = \text{cost} \end{cases} \tag{572}$$

Esempio: bilancia 'classica'. Chiamando $m_1$ la massa 'a sinistra' (fare disegno) e $m_d2$ quella a destra, con $b_1$ e $b_2$ i due bracci dal punto di rotazione (fulcro), il momento delle forze è ortogonale al piano di rotazione (e del disegno) e quindi in verso positivo del momento delle forze è quello uscente dal foglio. Quando la bilancia è in equilibrio e in posizione orizzontale si ha $M = b_1 \cdot (m_1 g) - b_2 \cdot (m_2 g) = 0$. Ovvero la condizione di equilibrio è data da $b_1 m_1 = b_2 m_2$.

## 23.8

Per completezza (non svolto a lezione e non in programma): applicazione dei momenti delle forze: leve (Asta rigida che ruota intorno ad un punto fisso detto *fulcro*). Momenti delle forze rispetto al fulcro condizione di equilibrio: $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$.
"*Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra!*"
Terminologia classica delle leve: (forza di) 'potenza' ($P$) e (forza di) 'resistenza' ($R$); 'braccio di potenza' ($p$) e braccio di resistenza ($r$); condizione di equilibrio ($r\,R = p\,P$, ovvero $P = R\,r/p$); classificazione delle leve in 'vantaggiosa' ($p > r$), 'svantaggiosa' ($p < r$) e indifferente ($p = r$). Tipi (o 'generi') di leve:

- $1^o$) fulcro fra 'potenza' e 'resistenza': può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente a seconda della posizione del fulcro;
- $3^o$) 'resistenza' fra fulcro e 'potenza' (es. carriola): è per definizione solo vantaggiosa, in quanto $p > r$;
- $3^o$) 'potenza' fra fulcro e 'resistenza' (es. mollette e bicipiti): è per definizione solo svantaggiosa, in quanto $p < r$.

## 23.9 Problemi

1. Una forza di intensità $(5, 0, 0)\,\mathrm{N}$ è applicata al punto $(0, 2, 0)\,\mathrm{m}$. Calcolare il momento della forza.

2. Dati $\vec{a} = \{1,\ -2,\ 0\}$ e $vecb = \{2,\ 1,\ \}$, calcolare $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sia usando la formula a partire dale componenti del vettore che usando i moduli dei vettori e il seno dell'angolo compreso.

3. Calcolare il momento di inerzia di una barra di sezione $S$, lunghezza $L$ e densità $\rho$ intorno an un suo estremo (considerare l'elemento di massa fra $x$ e $x + dx$ dal pinto di rotazione). Riscrivere, alla fine, il momento di inerzia in funzione di massa e lunghezza della barra (dimensionalmente già sappiamo che deve essere $\propto M\,L^2$).

4. Un disco di 20 cm di diametro e 0.1 kg di massa è disposto orizzontalemente ed è libero di ruotare intorno al proprio asse. Esso ha, a 5 cm dal centro una piccola protuberanza (di massa trascurabile). Un proiettile di 50 g viene lanciato orizzontalmente ad una velocità 5 m/s e colpisce la pretuberanza in modo perpendicolare al raggio. Usando la conservazione del momento della quantità di moto trovare la velocità angolare finale del sistema disco-prioettile, sapendo che il disco era inizialmente fermo.

5. Un disco di ferro (densità 7.9 g/cm$^3$) di 30 cm di diametro, spessore 1 cm e densità 2 g/cm$^3$ è disposto orizzontalemente e ruota ad una velocità angolare di 500 giri/minuto. Un oggetto magnetizzato, di massa 200 g, viene fatto cadere verticalmente sul disco e rimane attaccato ad una distanza di 5 cm dal bordo. Calcolare la velocità finale del sistema ruotante.

6. Dimostrare che nel caso di 'forze centrali' ad esempio quelle di attrazioni di pianeti e comete, il momento della quantità di moto di conserva (motivo per il quale pianeti e comete aumentano velocià avvicinandosi al sole).