Probabilità e incertezza di misura
Lezioni per il dottorato
(G. D'Agostini)

1. **$\boxed{10/1/05}$**
Introduzione: dalle osservazioni alle ipotesi; 'task of the physicist'; incertezza. Sorgenti di incertezza (*Guida* ISO). Trattazione usuali di incertezze. Rassegna critica di alcune conoscenze standard ($\approx$ *Fisichetta*): concetto e propagazione di 'errori massimi'; semidispersione massima; uso della propagazione di 'errori statistici'; regola della mezza divisione; barre di errore calcolate dalle sole osservazioni; rette di massima e minima pendenza; significato di $\mu = \overline{x} \pm \sigma/\sqrt{n}$ (o $\mu = \overline{x} \pm \sigma$?).

2. **$\boxed{12/1/05}$**
Continuazione rassegna critica. Inversione intuitiva di probabilità ("cane $\leftrightarrow$ cacciatore"): $P(\ldots \le \overline{x} \le \ldots) \Rightarrow P(\ldots \le \mu \le \ldots)$; controesempi.
Critica dello schema dei 'test di ipotesi' frequentisti. Probabilità delle ipotesi Vs probabilità della variabile di test ($\rightarrow$ significatività statistica). Esempi accademici (possibile errore dello studente e scherzo alla rivista scientifica) e di interesse publico (test dell'AIDS)
Dalle cause agli effetti: inferenza e incertezza. Probabilità degli effetti Vs probabilità delle cause (e dei valori veri).
Approccio falsificazionista e sua implementazione pratica mediante i test di ipotesi. Significato ed errata interpretazione dei p-value, con esempi di annunci di false scoperte dovuti a banali errori di logica (es "eventi di HERA").

3. **$\boxed{13/1/05}$**
"Definizione dell'intervallo di confidenza" (esempio da dispense di fisica).
Parentesi su misura della longitudine (tirata in ballo a proposito di Maskelyne e degli errori di lettura).
Incertezza e probabilità: reset, ricominciando da un "ritorno al passato".
Esempi di eventi incerti e valutazione intuitiva di probabilità: dadi; eventi 'unici'; paradosso delle due buste; contatore. Probabilità secondo Hume. Diversità concettuale e pratica fra $f(x \mid \mu)$ e $f(\mu \mid x)$: schema a due livelli: valori 'veri' e osservazioni.
Critica alle (tipiche) definizioni da manuale della probabilità. Probabilità come grado di fiducia: significato del termine *soggettivo*. Probabilità condizionata.
Dal concetto di probabilità alla struttura logica della probabilità e alla dichiarazione dei valori di probabilità. Ruolo della scommessa coerente.

4. $\boxed{\textbf{17/1/05}}$
   Possibili obiezioni e chiarimenti su: significato della scommessa; soggettività $\neq$ arbitrarietà, etc.
   Altri approcci alla probabilità come grado di fiducia (Cox/Jaynes, calibrazione).
   Approccio assiomatico.
   Dalla coerenza agli assiomi.
   Ruolo del calcolo combinatorio (Cap. 3 dispense).
   Regole della probabilità (Cap. 4 dispense). In particolare: classi complete; evento condizionato; probabilità della somma logica; relazione fra probabilità condizionata e congiunta e significato della "formula della probabilità condizionata"; legge delle alternative (o formula di disintegrazione, o delle probabilità totali). Indipendenza logica (stocastica).

5. $\boxed{\textbf{19/1/05}}$
   Numeri aleatori discreti e funzioni di probabilità. Funzione cumulatica.
   Cenni sui metodi di Monte Carlo ('branching' elementari, 'hit/miss' e inversione della cumulativa).
   Processo di Bernoulli, distribuzione geometrica e binomiale.
   Sintesi probabilistiche: valore atteso, moda, mediana, varianza, deviazione standard.
   Analogie meccaniche (baricentro e momento di inerzia).
   Disuguaglianze di Markov e di Cebicev.
   Distribuzioni di probabilità e distribuzioni statistiche.

6. $\boxed{\textbf{20/1/05}}$
   Nota storica: citazioni da *The foundation of the theory of probability*, di E. Schrödinger.
   Distribuzione di Poisson. Processo di Poisson. Distribuzione esponenziale.
   Distribuzioni di probabilità di variabili continue: funzione densità di probabilità, cumulativa, calcolo di valore atteso e varianza, etc.
   Distribuzione uniforme, triangolare e di Gauss. Schema riassuntivo.
   Distribuzioni di più variabili. Funzioni congiunta, marginale e condizionata. Calcolo di valore atteso e varianza. Concetto di covarianza e di coefficiente di correlazione.
   Distribuzione normale bivariata e multivariata.

7. $\boxed{\textbf{24/1/05}}$
   Propagazione di incertezze ("distribuzioni di probabilità di funzioni di variabili casuali"). Schema generale e approssimazioni. Caso generale per variabili discrete e continue. Linearizzazione. Valore atteso e combinazioni lineari di variabili casuali.
   Teorema del limite centrale e sue applicazioni.
   Propagazione di varianza e covarianza di combinazioni lineari. Linearizzazione.
   Propagazione di incertezze mediante simulazione (metodo di MC); esempio del gioco dell'oca.
   Teorema di Bernoulli ("legge" dei grandi numeri): significato e misinterpretazioni.

8. **26/1/05**
   Propagazione della matrice di covarianza.
   Introduzione al linguaggio R e suo uso in statistica, con vari esempi (vedi http://www.roma1.infn.it/˜dagos/R/).

9. **27/1/05**
   Note sulla simnulazione di eventi fisici mediante metodi di Montecarlo: concettualmente → "campionamento su distribuzioni congiunte a molte variabili a partire da distribuzioni condizionate, con successiva marginalizzazione".
   Introduzione all'inferenza bayesiana mediante il problema delle sei scatole, con diverse variazioni sul tema. Ruolo delle prior.
   Problema del 'probabile baro', e uso intuitivo del ragionamento bayesiano ("chi è al telefono?"). Problema del test dell'AIDS e dell'identificazione di particelle. 'Odd ratios' e fattore di Bayes.

10. **9/3/05**
    Inferenza probabilistica ('bayesiana') applicata a numeri incerti discreti (es. parametri discreti di distribuzione geometrica). Ragionamento probabilistico vs metodi ad hoc, basati sui p-values o sulla lontananza dal valore atteso.
    Inferenza parametrica. Inferenza di una proporzione, interpretata come parametro p di un processo di Bernoulli: soluzioni (coincidenti) assumendo un modello geometrico o un modello binomiale per descrivere il dato empirico. Principio di verosimiglianza (rispettato automaticamente dall'inferenza bayesiana).
    Studio sistematico dell'inferenza del parametro p del modello binomiale: $f(p \mid x, n)$ ipotizzando prior uniforme. Valore atteso e varianza. Significato di $\mathrm{E}[p]$. Formula recursiva di Laplace. Limite per grandi numeri (sia di successi che di insuccessi): 'Recupero' della valutazione della probabilità dalla frequenza relativa. [Memento: "frequenza → probabilità": teorema di Bayes; " probabilità → frequenza": teorema di Bernoulli. Ma concettualmente "probabilità ≠ frequenza"!]
    Caso in cui sono osservati solo successi o solo insuccessi.
    Combinazine di misure indipendenti (che si riferiscono allo stesso p).
    Prior coniugate. Distribuzione beta. Aggiornamento dei parametri della beta alla luce di risultati di 'esperimenti binomiali'. Esempio di prior 'informativa' modellizzata con una beta. Limite per grandi numeri.
    Il biliardo di Bayes. Statistica bayesiana.

11. **23/3/05**
    Infernza di λ della poissoniana: $f(\lambda \mid x)$. Limite per x grande e caso di $x = 0$. Upper limit.
    Nota critica sui "xx% C.L. upper limits" non basati sull'inversione di probabilità. Motivo della coincidenza numerica nel caso poissoniano (senza background!) e controesempi.
    Prior coniugata. Derivazione della distribuzione di Erlang dal tempo di attesa di k

conteggi in un processo di Poisson (applicazione della formula generale della 'propagazione di incertezze'). Definizione della Gamma come estensione al continuo del parametro k della Erlang ("$k \rightarrow c$").
Proprietà della Gamma e calcolo di valore atteso e varianza. Definizione formale della distribuzione del χ^2. Schema riassuntivo.
Esempi dell'uso della Gamma come coniugata della poissoniana.
Combinazione di risultati n osservazioni, ciascuna effettuata nello stesso tempo di misura T.
Inferenza dell'intensità del processo di Poisson r. Combinazione di risultati, anche con tempi di osservazione diversi. Invarianza del risultato sotto diverse modellizzazioni (consistenti) delle stesse osservazioni (Poisson vs Erlang).

12. $\boxed{\textbf{30/3/05}}$
Inferenza parametrica: breve riepilogo e introduzione fisica al problema, con considerazioni di base sull'apprendimento alla luce di osservazioni sperimentali.
Terema di Bayes dal punto di vista del fisico.
Verosimiglianza gaussiana. Ruolo delle prior e inferenza su μ nel caso di prior uniforme. Significato di $f(\mu \,|\, x)$ vs "intervalli di fiducia".
Caso di prior coniugata gaussiana (con dettagli sui conti): casi limite di prior vaga e di prior 'esatta'. Combinazione di risultati mediante la media pesata con l'inverso della varianza.
Aggiornamento bayesiano nel linguaggio del filtro di Kalman.
Osservazioni al limite della regione fisica: "misura della massa del neutrino".
Distribuzione predittiva (con dettagli sull'integrazione sul μ 'intermedio'. Esempio di inferenza su μ e di predizione di una media su n osservazioni a partire da una media fatta precedentemente sullo stesso numero di osservazioni (assumendo σ nota). Iterazione del problema alla luce della conoscenza del risultato di un secondo campione (etc per m campioni, ciascuno di n osservazioni).
Inferenza su μ a partire dalle n osservazioni individuali (anzichè dalla sola conoscenza della media), assumendo un modello normale per la singola osservazione intorno a μ. Sufficienza statistica.
Cenni al caso di incertezza anche su σ: inferenza congiunta su μ e σ, con successive marginalizzazioni.
Nota sull'approccio "formula oriented" vs quello "pdf oriented": nell'approccio bayesiano la risposta al problema inferenziale consista nel costruire la congiunta (possibilmente normalizzata) dei parametri di interesse.

13. $\boxed{\textbf{6/4/05}}$
Distribuzione predittiva nel modello binomiale (e quindi anche delle frequenze relative) e nel modello poissoniano.
Modelli gerarchici e iperparametri.
Nota storica: la derivazione di Gauss della gaussiana.
Inferenza congiunta dei parametri μ e σ della gaussiana da un campione di osser-

vazioni indipendenti. Ragionamento intuitivo, valido per campioni molto numerosi. Difficoltà a fare i conti con prior 'informative', cioè μ e σ (o μ e $v = \sigma/|\mu|$) modellizzate con distribuzioni di probabilità derivanti dall'esperienza e inerenti il problema in esame.
Esempi da manuale di inferenza su μ e σ (da prendersi *cum grano salis*) ipotizzando prior uniforme in μ e prior uniforme sia in σ che in $\ln\sigma$ (ovvero uniforme in $1/\sigma$). Distribuzione di probabilità di μ e di σ sotto le due ipotesi di prior su σ. Limiti per campioni 'numerosi' (oltre la decina $\approx$ OK, a parte le code della distribuzione di probabilità alle quali non si deve comunque credere in quanto dipendenti da prior 'accademiche' e sicuramente non realistiche).
Inferenza di $1/\sigma^2$ sotto le due ipotesi di prior accademiche per σ.
Distribuzione di $\sum_i (x_i - \overline{x})^2/\sigma^2$ in modelli gaussiani in problemi inferenziali (σ ignota) e in problemi di 'probabilità diretta' (σ nota). Valore atteso e incertezza su σ a partire dalla distribuzione di σ (attenzione alle condizioni sottostanti le regolette di propagazione!).
Introduzione al problema delle incertezze dovute ad effetti sistematici nel quadro dell'approccio probabilistico all'inferenza.

14. **20/4/05**
Incertezze dovute ad errori sistematici nel linguaggio probabilistico. Inferenza condizionata dai 'fattori di influenza'. Diverse alternative per tener conto dei possibili valori dei fattori di influenza: inferenza globale e successiva marginalizzazione; inferenza condizionata; propagazione di incertezze (valori 'row' and 'corretti').
Incertezza dullo zero di uno strumento: una o più misure con stesso strumento; correlazioni introdotte dalle sistematiche. Normale bivariata, distribuzioni marginali, distribuzioni condizionate ($\rightarrow$ valori attesi e varianze condizionate). Linearizzazione. Esempi: incertezza di zero e di scala.
Incertezze di tipo A e di tipo B (BIPM/ISO).

15. **27/4/05**
Ancora su incertezze di tipo B: esempi.
Modelli grafici per inferenza, incluse sistematiche e distribuzioni predittive: reti bayesiane (o belief networks).
Sistematiche su upper limits.
Trattazione del background nell'inferenza dell'intensità del processo di Poisson.
Metodi approssimati: recupero (e caveat!) di alcuni metodi 'standard', in particolare fit, basati su massima verosimiglianza e minimi quadrati.

16. **4/5/05**
Ancora sul problema delle sei scatole: significato di probabilità di 'rosso' alla prossima estrazione; confronto fra risultto bayesiano e frequentista; impossibilità di simile confronto per la probabilità della composizione delle scatole.
Test di ipotesi frequentisti e del perché "spesso funzionano". Perchè i p-value sono

basati su dati non osservati e (quindi) perchè violano in genere il principio di verosimiglianza.
Sulla definizione dell'intervallo di confidenza: dov'è il trucco?
Coverage frequentista: (non)significato e controparte bayesiana.
Concetto (non strettamente bayesiano) dei cosiddetti stimatori bayesiani e del perché l'analisi (frequentista) che li ritiene distorti è ... distorta.

17. **11/5/05**
Which priors for frontier physics?
Ancora sulle priors: ruolo, significato e valutazione. Priors puramente soggettive (giudizio dell'esperto), priors coniugate e priors basate su 'principi'. Esempi di queste ultime: invarianza di traslazione e di scala ('Jeffreys'); massima entropia (con cenni sull'entropia dell'informazione di Shannon).
Discussione sui casi di frontiera, con esempio di misura di intensità del processo di Poisson in presenza di background. Priors che riflettono l''atteggiamento positivo' di chi ha fatto l'esperimento. Problemi concettuali e interpretativi con prior uniforme in r e in $\log r$. Funzione $\mathcal{R}$ (likelihood riscalata) in analogia al fattore di Bayes. Esempi reali: compositness ad HERA (ZEUS), massa dell'Higgs dalle misure dirette. Differenza concettuale fra limite probabilistico (o di confidenza) e limite di sensibilità. Classificazione delle likelihood in chiuse e aperte (e motivazione di queste ultime). Analisi combinata sul valore della massa dell'Higgs (misure dirette e correzioni radiative).

18. **18/5/05**
Inferenza bayesiana per la misura dei parametri $\overline{\rho}$ e $\overline{\eta}$ della matrice unitaria (CKM): conto dettagliato con MC e conto semplicato.
Introduzione ai fit. Fit parametrico e modello tipico con errore gaussiano e solo sulle y. Soluzione generale bayesiane ed approssimazioni. Calcolo approssimativo di valori attesi e matrice di covarianza sotto ipotesi di normalità. Proprietà della gaussiana multivariata (massimo ed hessiano dell'esponentee) suo uso. 'Regole di $\Delta(-\log\mathcal{L}) = 1/2$ e $\Delta\chi^2 = 1$ e loro uso (e abuso). Esempio di calcolo di deviazione standard del parametro dalla curvatura della curva di verosimiglianza: $\sigma(p)$ e $\sigma(\lambda)$.

19. **25/5/05**
Sviluppo in serie del χ^3, in funzione dei parametri, nell'intorno del suo minimo e approssimazione a normale (multivariata) della posterior inferenziale. Discusione del caso esattamente gaussiano, quando il modello dipende linearmente dai parametri. Differenza fra normalità della verosimilianza vista come funzione di probabilità dei dati e vista, a meno di un fattore di proporzionalità, come funzioone di probabilità dei parametri.
Riepilogo della catena di approssimazioni. Casi di fit con chi^2 non banalmente parabolico.
Fit lineare in dettaglio: calcolo esatto e 'approssimazione' (in realtà esatta) gaus-

siana. Interpretazione dei risultati su valori attesi, varianze e covarianza. Fit nel sistema trasformato in cui $\overline{x} = 0$. Interpolazioni ede estrapolazioni. Incertezza sul valore vero estrapolato e sul risultato di una misura in corrispondenza di un punto estrapolato.. Fit con incertezza anche sulle x: caso esatto lineare e regoletta per caso generale. Fit con σ incognita, etc.
Incertezze dovute ad errori sistematici: impostazione del conto esatto e discussione qualitativa per fit lineare con errore di zero o di scala su entrambe le coordinate.